

Математика, 10-11 класс (17 ноября 2016 года)

Количество команд, решивших каждую задачу

Задача №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Решило	92	36	104	95	6	2	76	109	10	114	108	77	16	49	94	36	23	20

Задания и ответы

1. Два последовательных двузначных числа сложили и в их сумме переставили цифры. В результате получили большее из складываемых чисел. Каково меньшее из складываемых?

Ответ: 36.

2. В примере $**** + 2016 = ****$ звёздочками заменили восемь различных цифр. Какое наименьшее значение суммы могло быть?

Ответ: 3502.

Пример: $1486 + 2016 = 3502$.

3. Около круга радиуса 4 описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 40. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 80.

4. Катя, Оля и Лена задумали двузначное число. На вопрос учителя «На что оно делится?», они сказали по два утверждения.

Катя: «Во-первых, оно делится на 5», «Во-вторых, оно делится на 11».

Оля: «Во-первых, оно делится на 5», «Во-вторых, оно делится на 15».

Лена: «Во-первых, оно делится на 3», «Во-вторых, оно делится на 25».

Какое число задумали девочки, если известно, что все сказали различное число верных высказываний?

Ответ: 55.

5. Какие утверждения про уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ являются верными?

- (1) Уравнение всегда имеет ровно два разных действительных корня.
- (2) Уравнение может иметь более двух различных действительных корней.
- (3) Уравнение всегда имеет по крайней мере один действительный корень.
- (4) При $c = 0$ уравнение всегда имеет два разных действительных корня.

Ответ: 2.

6. Пара чисел A и B такова, что система уравнений $XYZ + X = A$, $X^2YZ + X = B$, $X^2 + Y^2 + Z^2 = 4$ имеет единственное решение. Чему равно $A + 2B$?

Ответ: -6.

Указание 1. Система имеет единственное решение при $A = B = -2$.

Указание 2. Если $(X; Y; Z)$ — решение системы, то $(X; -Y; -Z)$ — также решение системы. Значит, решение единственно при $Y = Z = 0$. Тогда $X^2 = 4$, откуда либо $A = B = 2$, либо $A = B = -2$. В первом случае система имеет более одного решения, во втором — единственное.

7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; $AB = 12$; точки E и F — середины соответственно ребер AD и CD , точка G на ребре BB_1 такова, что $2BG = B_1G$. Сечение, проходящее через точку G параллельно плоскости (D_1EF) , пересекает ребро A_1B_1 в точке X . Найдите длину отрезка A_1X .

Ответ: 8.

8. В летнюю школу «Kostroma Open» приехали 200 школьников, которых поровну расселили в два корпуса. В первом корпусе живут $\frac{2}{3}$ всех мальчиков и четверть всех девочек. Сколько девочек приехало в ЛМШ?

Ответ: 8.

9. Сколько пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих соотношению

$$x^2 + 5y^2 = 5(x + y) - 3xy?$$

Ответ: 6.

Указание. Подходят пары $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(2; 1)$, $(5; 0)$, $(5; -2)$, $(6; -2)$.

Указание. Данное соотношение преобразуется к виду

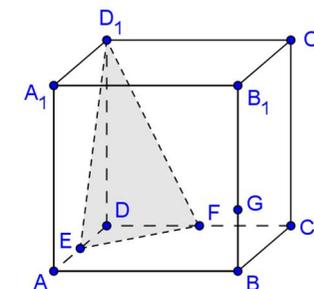
$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (x + 3y)^2 = 50.$$

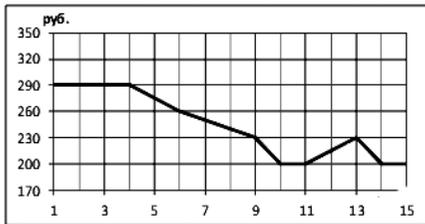
Число 50 можно представить как сумму трёх квадратов следующим образом: $50 = 0^2 + 1^2 + 7^2 = 0^2 + 5^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$.

10. Палка варёной колбасы стоила 100 рублей, её цену увеличили на $A\%$, она стала стоить 200 руб. Палка копчёной колбасы стоила 200 рублей, её цену уменьшили на $B\%$, она стала стоить 100 руб. Чему равно $A + B$?

Ответ: 150.

11. На рисунке показано, как на бирже по покупке-продаже дров с 1 по 15 ноября менялась цена на кубометр дров. Бизнесмен Вася 2 ноября приобрёл 100 кубометров, 6 апреля он продал половину купленных дров, а остальные двора продал 13 ноября. Сколько рублей потерял бизнесмен Вася в результате этих операций?





Ответ: 4500.

12. Вычислите $\sin 84^\circ : \cos 2^\circ - \cos 84^\circ : \sin 2^\circ$.

Ответ: -2.

13. На доске 7×7 стоят короли, не бьющие друг друга, так, что в каждой горизонтали и каждой вертикали стоит хотя бы один король. Какое наибольшее число королей может стоять на доске?

Ответ: 13.

Указание. Расстановка 13 королей показана на рисунке справа.

К		К				К
				К		
К		К				К
				К		
	К					К
			К			
К						К

14. При каком наибольшем натуральном значении N число $(12^{10})^6 \cdot (18^{11})^6 : 6^N$ является целым?

Ответ: 186.

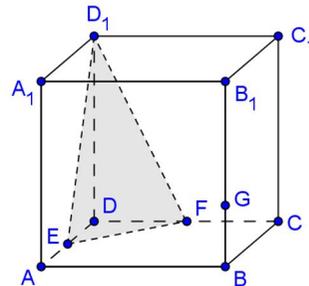
15. Какие из следующих утверждений являются верными?

Окружность можно вписать ...

- (1) в любой треугольник;
- (2) в любой квадрат;
- (3) в любой прямоугольник;
- (4) в некоторые прямоугольники;
- (5) в любой параллелограмм;
- (6) в некоторые параллелограммы.

Ответ: 1 2 4 6.

16. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$; точки E и F — середины соответственно ребер AD и CD , точка G на ребре BB_1 такова, что $2BG = B_1G$. Площадь сечения D_1EF равна 90. Чему равна площадь сечения, проходящего через точку G параллельно плоскости (D_1EF) ?



Ответ: 40.

17. На какие простые числа делится число $3^{15} + 3^{11} + 3^6 + 1$ без остатка?

Ответ: 2, 61.

18. Пара целых чисел A и B удовлетворяет неравенствам $3B - A < 5$, $A + B > 26$, $3A - 2B < 46$. Чему равно $A + 2B$?

Ответ: 36.

Указание. Неравенствам удовлетворяет только пара (20; 8).