



Блок 1. Текстовые задачи

Подготовительное занятие

Задания

- Вчера Лёня покупал ириски. В магазине 9 кг ирисок стоили меньше 1000 рублей, а 10 кг тех же ирисок — дороже 1100 рублей. Сколько стоит 1 кг ирисок, если эта цена — целое число рублей?
 - После прогулки в детском саду воспитатель сказала, что ровно $\frac{2}{3}$ детей катались с горки, а ровно $\frac{3}{5}$ детей капались в песочнице. Сколько всего детей было на прогулке, если известно, что их меньше 30?
 - У Пети дома есть ириски, их меньше 100. Это 11,4 % от числа ирисок, что были вчера. Сколько ирисок было вчера?
1. В классе $\frac{5}{6}$ всех учеников увлекаются математикой, а $\frac{5}{8}$ всех учеников — физической. Сколько всего детей учится в этом классе, если известно, что их меньше 30?
 2. Петр Петрович закупал канцелярию в свой офис. Известно, что он купил меньше 120 предметов: ручек, карандашей и ластиков. Ручек он взял столько же, сколько карандашей и столько же, сколько ластиков. При этом из всех ручек 5% — красные. Сколько карандашей он купил?
 3. Десяти крольчатам раздали 64 морковки. После этого первый крольчонок сказал, что по крайней мере 1 морковка у него имеется. «А у меня ровно на одну больше!» — сказал второй. «А у меня ровно на одну больше, чем у тебя!» — сказал третий второму, затем такую же фразу произнес четвертый — третьему, ..., девятый — восьмому. А десятый девятому заявил: «У меня морковок больше, чем у тебя!». Сколько морковок получил десятый крольчонок?
 4. На ярмарке школьных поделок Петя купил несколько блокнотов на 1978 фантиков. Затем он передумал и три блокнота вернул обратно. Часть возвращенных фантиков он истратил на шоколадку за 140 фантиков. Сколько блокнотов купил Петя?
 5. Для спортивных состязаний нужно разбить учеников школы на команды. Если сделать 19 команд по 6–7 школьников, то менее четверти команд будут из 7 человек. Если же сделать 22 команды по 5–6 школьников, то более трети будут из 6 человек. Сколько детей в этой школе?
 6. Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?



7. В магазине было 6 ящиков, массы которых соответственно 15, 16, 18, 19, 20 и 31 килограммов. Две фирмы приобрели пять ящиков, причём одна из них взяла по массе яблок в два раза больше, чем другая. Какой ящик остался в магазине?
8. Однажды Винни встретил в своих записях некоторое число, про которое он заметил, что если его увеличить на 5 и возвести в квадрат, то получится трехзначное число, а если уменьшить на 4 и возвести в куб, то пятизначное. Какое число встретил в своих записях Пух?
9. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в 10-м подъезде в квартире № 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Указания, ответы и решения

✓ Данное занятие посвящено решению текстовых задач, в которых, на первый взгляд, недостаточно условий. Но если в такой подбирать ответ, то становится понятно, что он единственный. Это возникает из-за ряда ограничений: (1) ответ, обычно, должен быть натуральным (или просто целым) числом, (2) искомое число должно быть кратно какой-то величине, (3) в условии даны ограничения на число.

✓ В начале занятия предлагается разобрать вместе с учениками задачи, отмеченные точками. Рекомендуем предложить подобрать ответ, а затем понять, почему он единственный.

✓ Стоит заметить, в любой математической задаче подразумевается, что нужно найти ответ и показать, почему другие ответы не годятся. Когда задачу решают по действиям, проходят рассуждения «должно быть так, а не иначе», откуда следует единственность полученного ответа. Но не всегда решение можно свести к арифметическим действиям. Из подобных заданий и состоит предлагаемое занятие.

Задания для общего разбора.

- Вчера Лёня покупал ириски. В магазине 9 кг ирисок стоили меньше 1000 рублей, а 10 кг тех же ирисок — дороже 1100 рублей. Сколько стоит 1 кг ирисок, если эта цена — целое число рублей?

Ответ: 111 рублей.

Указание. Подберите (методом проб и ошибок) подходящее число.

Замечание. Приведем два решения, оба полезно показать ученикам. В первом случае подбирается ответ и показывается, почему другие числа не подходят в качестве ответа. Во втором задаются ограничения, из которых выбирается единственное подходящее число.

Решение 1 (подбор). Заметим, что ответ «111» подходит: 9 кг стоят 999 рублей, что меньше 1000, а 10 кг стоят 1110 рублей, что больше 1100.

Другие числа не подходят. Действительно, если цена меньше, то она не более 110 — тогда 10 кг стоят 1100, что не дороже 1100 рублей. Если цена больше, то она не менее 112 — тогда 9 кг стоят $9 \cdot 112 = 1008$, что дороже 1000 рублей.

Решение 2 (неравенства). Ириски должны стоить более $1000 : 10 = 110$ рублей, но менее $1000 : 9 = 111 + 1/9$. Между числами 110 и $111 + 1/9$ только одно целое число — это 111. Поэтому, это единственный кандидат на ответ. Не трудно проверить, что оно подходит (см. предыдущее решение).

- После прогулки в детском саду воспитатель сказала, что ровно $2/3$ детей катались с горки, а ровно $3/5$ детей капались в песочнице. Сколько всего детей было на прогулке, если известно, что их меньше 30?

Ответ: 15.

Указание. Если подбирать ответ, то становится понятно ограничение: $2/3$ и $3/5$ от общего числа детей должны быть целыми числами.

Решение. Если $2/3$ от числа детей — целое число, то их количество кратно 3. Если $3/5$ от числа детей — целое число, то их количество кратно 5. Тогда общее количество делится на $3 \cdot 5 = 15$. Единственное натуральное, меньшее 30 и делящееся на 15 — число 15.

- У Пети дома есть ириски, их меньше 100. Это 11,4 % от числа ирисок, что были вчера. Сколько ирисок было вчера?

Ответ: 500.

Указание. Запишите, как связаны между собой число ирисок сегодня и вчера.

Решение. Если вчера было V ирисок, а сегодня — S , то $11,4 \cdot V : 100 = S$. Перепишем данное равенство (чтобы все части были заведомо целыми):

$$100 \cdot S = 11,4 \cdot V,$$

$$1000 \cdot S = 114 \cdot V,$$

$$500 \cdot S = 57 \cdot V \text{ (далее сократить нельзя, так как НОД (500; 57) = 1).}$$

Значит, S кратно 57 и менее 100 (по условию), откуда $S = 57$.

Получаем $V = 500 \cdot S : 57 = 500$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В классе $5/6$ всех учеников увлекаются математикой, а $5/8$ всех учеников — физикой. Сколько всего детей учится в этом классе, если известно, что их меньше 30?

Ответ: 24.

Решение. Если $5/6$ класса — целое число, то количество учеников кратно 6. Если $5/8$ класса — целое число, то количество учеников делится на 8. Тогда количество учеников делится на НОК (6; 8) = 24. Единственное натуральное, меньшее 30 и делящееся на 24 — число 24.

2. Петр Петрович закупал канцелярию в свой офис. Известно, что он купил меньше 120 предметов: ручек, карандашей и ластиков. Ручек он взял столько же, сколько карандашей и столько же, сколько ластиков. При этом из всех ручек 5% — красные. Сколько карандашей он купил?

Ответ: 20.

Решение. По условию 5% должно быть целым числом, значит, число ручек кратно 20. Так как ручек, карандашей и ластиков было поровну, то общее число предметов кратно $20 \cdot 3 = 60$. Единственное такое число, меньшее 120, равно 60. Значит, предметов было 60, а карандашей — $60 : 3 = 20$.

3. Десяти крольчатам раздали 64 морковки. После этого первый крольчонок сказал, что по крайней мере 1 морковка у него имеется. «А у меня ровно на одну больше!» — сказал второй. «А у меня ровно на одну больше, чем у тебя!» — сказал третий второму, затем такую же фразу произнес четвертый — третьему, ..., девятый — восьмому. А десятый девятому заявил: «У меня морковок больше, чем у тебя!». Сколько морковок получил десятый крольчонок?

Ответ: 19 морковок.

Решение. Если 1-ый крольчонок получит хотя бы 2 морковки, то всего должно быть не менее $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 65$ морковок, что противоречит условию. Значит, 1-ый крольчонок получил 1 морковку. Тогда крольчата с номерами 2, 3, ..., 9 получили соответственно 2, 3, ..., 9 морковок. Значит, последний получил $64 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 64 - 45 = 19$ морковок.

4. На ярмарке школьных поделок Петя купил несколько блокнотов на 1978 фантиков. Затем он передумал и три блокнота вернул обратно. Часть возвращенных фантиков он истратил на шоколадку за 140 фантиков. Сколько блокнотов купил Петя?

Ответ: 23 блокнота.

Решение. Три блокнота стоят более 140 фантиков. Значит, один блокнот — более 46 фантиков (так как $45 \cdot 3 < 140$).

Цена блокнота — делитель числа $1978 = 2 \cdot 23 \cdot 43$. Делители, большие 46, равны $23 \cdot 43$ и $2 \cdot 43$. В первом случае блокнота только 2 (не подходит по условию), во втором — 23 штуки. Значит, Петя купил 23 блокнота по 86 фантиков.

5. Для спортивных состязаний нужно разбить учеников школы на команды. Если сделать 19 команд по 6–7 школьников, то менее четверти команд будут из 7 человек. Если же сделать 22 команды по 5–6 школьников, то более трети будут из 6 человек. Сколько детей в этой школе?

Ответ: 118.

Решение. Рассмотрим первый предложенный вариант. Команд с 7 игроками не более 4, поэтому в командах не более $19 \cdot 6 + 4 = 118$ человек.

Рассмотрим второй предложенный вариант. Будет не менее 8 команд по 6 человек, поэтому в командах не менее $22 \cdot 5 + 8 = 118$.

Единственное подходящее значение — 118.

6. Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

Ответ: 1001.

Решение. Если разделить 77 на количество минут в часе, получится количество часов в сутках. Если разделить 91 на количество минут в часе, получится количество секунд в минуте. Значит, на количество минут в часе и 77, и 91 делятся нацело. Поскольку в часе, очевидно, более одной минуты, в часе получается 7 минут — ни на какое другое число, большее единицы, 77 и 91 одновременно не делятся. Тогда в сутках $77 : 7 = 11$ часов и $11 \cdot 91 = 1001$ секунда.

7. В магазине было 6 ящиков, массы которых соответственно 15, 16, 18, 19, 20 и 31 килограммов. Две фирмы приобрели пять ящиков, причём одна из них взяла по массе яблок в два раза больше, чем другая. Какой ящик остался в магазине?

Ответ: 20-килограммовый.

Решение. Масса всех приобретённых яблок в три раза больше, чем масса яблок, приобретённых первой фирмой, то есть делится на 3.

Массы ящиков дают при делении на 3 остатки 0, 1, 0, 1, 2, 1. Масса всех ящиков даёт такой же остаток при делении на 3, как и сумма $0 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 = 5$. Следовательно, масса оставшегося ящика должна давать остаток 2 при делении на 3. Такой ящик только один — 20-килограммовый.

8. Однажды Винни встретил в своих записях некоторое число, про которое он заметил, что если его увеличить на 5 и возвести в квадрат, то получится трехзначное число, а если уменьшить на 4 и возвести в куб, то пятизначное. Какое число встретил в своих записях Пух?

Ответ: 26.

Решение. Максимальный трехзначный квадрат — это $31^2 = 961$ (так как $32^2 > 1000$), поэтому искомое число не превышает $31 - 5 = 26$. Минимальный пятизначный куб — $22^3 = 10\,648$ (так как $21^3 < 10\,000$), поэтому искомое число не меньше $22 + 4 = 26$. Значит, искомое число — 26.

9. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в 10-м подъезде в квартире № 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Ответ: на 3-й этаж.



Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2023–2024 учебный год

Решение. Если на этаже не более 3 квартир, то в десяти подъездах их не более, чем $10 \cdot 9 \cdot 3 = 270$, то есть в 10-м подъезде квартиры № 333 не будет.

Если на этаже не менее 5 квартир, то уже в девяти подъездах будет не менее, чем $9 \cdot 9 \cdot 5 = 405$ квартир, то есть искомая квартира будет не в десятом подъезде.

Значит, на этаже 4 квартиры, в первых девяти подъездах — $9 \cdot 9 \cdot 4 = 324$ квартиры. В десятом подъезде квартиры начинаются с 325-й. На втором этаже они начнутся с 329-й, на третьем — с 333-й.

Таким образом, Пете нужно подняться на третий этаж.