

Блок 7. Обратный ход

Подготовительное занятие

Задания

- Домашнее задание Пети состояло в том, что данное учителем число он должен был сначала поделить на 13, затем результат увеличить на 4, получившееся число умножить на 7, а из результата вычесть 8. Петя правильно сосчитал результат, получил 69. Какое число было дано Пете учителем для этого задания?
 - Решить уравнение $((x : 2 - 3) : 2 - 1) : 2 - 4 = 3$.
 - На озере расцвела одна лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на двадцатый день всё озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера? А четверть озера?
1. В пакете лежали конфеты. Маша в первый день недели съела $1/7$ часть конфет, на следующий день — $1/6$ часть остатка, потом — $1/5$ часть остатка, ..., в субботу — $1/2$ (половину) остатка, а в воскресенье последние 5 конфет. Сколько конфет было в пакете с самого начала недели?
 2. Торговец шел на рынок через трое ворот. Каждый раз за проход через ворота у него забирали четверть имеющихся у него денег. На рынок торговец вошел с 54 монетами. Сколько монет было у торговца в самом начале?
 3. Дедка вдвое сильнее Бабки, Бабка втрое сильнее Внучки, Внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее Кошки, Кошка вшестеро сильнее Мышки. Дедка, Бабка, Внучка, Жучка и Кошка вместе с Мышкой могут вытащить Репку, а без Мышки — не могут. Сколько надо позвать Мышек, чтобы они смогли сами вытащить Репку?
 4. Алиса тайком купила себе пакет с конфетами и спрятала его под подушку. Каждый вечер она съедала треть имеющихся в пакете конфет и еще 2 конфеты. В остальное время она эти конфеты не ела, а находила конфеты на кухне. На четвертый вечер она заглянула в пакет и обнаружила, что там осталось только две конфеты. Сколько конфет было в пакете первоначально?
 5. Три мальчика делили 120 фантиков. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было. Затем Ваня дал Толе и Пете столько, сколько у них стало. И наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько фантиков было у каждого в начале?

6. Коля задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру результата. Полученное число умножил на 7 и опять зачеркнул последнюю цифру результата. Получилось число 21. Какое число было задумано?
7. По кругу записаны 9 чисел: нулей и единиц (есть и те, и другие). За один ход между каждыми двумя соседними числами записывается число: 0, в случае если они равны, и 1 в противном случае. Затем старые числа стираются, на доске снова остаётся 9 чисел. Затем такую операцию повторяют несколько раз. Могут ли в какой-то момент все числа оказаться равными?
8. Натуральное число можно умножать на два и произвольным образом переставлять в нем цифры (запрещается лишь ставить ноль на первое место). Можно ли превратить число 1 в число 631 с помощью таких операций?

Указания, ответы и решения

«Обратный ход» или «Анализ с конца» — не просто идея делать операции наоборот. Ученикам нужно научиться реализовывать всё это без ошибок.

Предварительные задачи можно разобрать в начале занятия, их решения демонстрируют данную идею.

Предварительные задачи.

- Домашнее задание Пети состояло в том, что данное учителем число он должен был сначала поделить на 13, затем результат увеличить на 4, получившееся число умножить на 7, а из результата вычесть 8. Петя правильно сосчитал результат, получив 69. Какое число было дано Пете учителем для этого задания?

Ответ: 91.

Решение. Запишем наши операции $\dots \xrightarrow{:13} \dots \xrightarrow{+4} \dots \xrightarrow{\times 7} \dots \xrightarrow{-8} 69$ будем восстанавливать числа с конца в начало: $\dots \xleftarrow{\times 13} \dots \xleftarrow{-4} \dots \xleftarrow{:7} \dots \xleftarrow{+8} 69$. Получаем $91 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 77 \rightarrow 69$.

- Решить уравнение $((x : 2 - 3) : 2 - 1) : 2 - 4 = 3$.

Ответ: 66.

Решение. На решение уравнения можно посмотреть так же, как и на предыдущую задачу: $x \xrightarrow{:2} \dots \xrightarrow{-3} \dots \xrightarrow{:2} \dots \xrightarrow{-1} \dots \xrightarrow{:2} \dots \xrightarrow{-4} 3$. Можно так же восстанавливать с конца в начало, получив $66 \rightarrow 33 \rightarrow 30 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 3$.

- На озере расцвела одна лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на двадцатый день всё озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера? А четверть озера?

Ответ: половина — за 19 дней, четверть — за 18 дней.

Решение. Что было в конце? На 20 день было покрыто всё озеро, на 19 день — его половина, на 18 день — половина этой половины, то есть четверть озера.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В пакете лежали конфеты. Маша в первый день недели съела $1/7$ часть конфет, на следующий день — $1/6$ часть остатка, потом — $1/5$ часть остатка, ..., в субботу — $1/2$ (половину) остатка, а в воскресенье последние 5 конфет. Сколько конфет было в пакете с самого начала недели?

Ответ: 35.

Указание. Начнём считать с субботы — в этот день она съела 5 конфет, а перед субботой у неё было $5 + 5 = 10$ конфет. Эти 10 конфет — $2/3$ от числа конфет, что

были перед пятницей. То есть, перед пятницей было $10 : 2 \cdot 3 = 15$ конфет. И так далее.

Комментарий. Заметьте, что каждый день Маша съедала одно и то же число конфет. Это можно понять сразу: если есть 7 равных частей, то убирая первую часть уменьшаем на $1/7$, убирая вторую — на $1/6$, и так далее.

2. Торговец шел на рынок через трое ворот. Каждый раз за проход через ворота у него забирали четверть имеющихся у него денег. На рынок торговец вошел с 54 монетами. Сколько монет было у торговца в самом начале?

Ответ: 128.

Решение. Если торговец вышел из ворот с m монетами, то на входе у него было $m \cdot 4 : 3$ монет. Значит, чтобы найти начальное количество, нужно 54 три раза умножить на 4 и три раза поделить на 3. Получим $54 \cdot 4^3 / 3^3 = 128$ монет.

3. Дедка вдвое сильнее Бабки, Бабка втрое сильнее Внучки, Внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее Кошки, Кошка вшестеро сильнее Мышки. Дедка, Бабка, Внучка, Жучка и Кошка вместе с Мышкой могут вытащить Репку, а без Мышки — не могут. Сколько надо позвать Мышек, чтобы они смогли сами вытащить Репку?

Ответ: 1237 мышек.

Решение. Кошка заменяет 6 Мышек, Жучка — $5 \cdot 6$ Мышек, Внучка — $4 \cdot 5 \cdot 6$ Мышек, Бабка — $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ Мышек, Дедка — $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ Мышек. Итого потребуется $(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) + (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) + (4 \cdot 5 \cdot 6) + (5 \cdot 6) + 6 + 1 = 1237$ Мышек.

4. Алиса тайком купила себе пакет с конфетами и спрятала его под подушку. Каждый вечер она съедала треть имеющихся в пакете конфет и еще 2 конфеты. В остальное время она эти конфеты не ела, а находила конфеты на кухне. На четвертый вечер она заглянула в пакет и обнаружила, что там осталось только две конфеты. Сколько конфет было в пакете первоначально?

Ответ: 21.

Решение. Рассмотрим ситуацию с конца:

$$2 \leftarrow (2 + 2) \cdot 3/2 = 6 \leftarrow (6 + 2) \cdot 3/2 = 12 \leftarrow (12 + 2) \cdot 3/2 = 21.$$

5. Три мальчика делили 120 фантиков. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было. Затем Ваня дал Толе и Пете столько, сколько у них стало. И наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько фантиков было у каждого в начале?

Ответ: у Пети было 65 фантиков, у Вани — 20, а у Толи — 35.

Решение. Мы знаем, что в конце у всех оказалось по 40 фантиков, а перед этим у Пети и Вани было вдвое меньше. Значит, у Пети и Вани было по 20, а у Толи — 80. А перед этим у Пети и Толи было вдвое меньше, т. е. у Пети было 10, у Толи

— 40, у Вани — 70. И наконец, возьмём половину фантиков у Вани и Толи и вернем Пете.

6. Коля задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру результата. Полученное число умножил на 7 и опять зачеркнул последнюю цифру результата. Получилось число 21. Какое число было задумано?

Ответ: 24.

Решение. Число 21 получили из числа $21*$, кратного 7. Это 210 или 217. Далее цепочка раздваивается:

$$21 \leftarrow \begin{cases} 210 \leftarrow 30 * \leftarrow \text{нет числа} \\ 217 \leftarrow 31 * \leftarrow 312 \leftarrow 24 \end{cases}$$

Нет числа вида $30*$, кратного 13, так как $23 \cdot 13 = 299$ и $24 \cdot 13 = 312$ — два соседних числа, кратных 13. Число вида $31*$, кратное 13 — только 312.

7. По кругу записаны 9 чисел: нулей и единиц (есть и те, и другие). За один ход между каждыми двумя соседними числами записывается число: 0, в случае если они равны, и 1 в противном случае. Затем старые числа стираются, на доске снова остаётся 9 чисел. Затем такую операцию повторяют несколько раз. Могут ли в какой-то момент все числа оказаться равными?

Ответ: нет, не могут.

Решение. Предположим, такое получилось. Если это единицы, то до этого 1 и 0 должны чередоваться, что невозможно (количество чисел нечётно). Если это нули, то они получились из ситуации, когда все числа одинаковы. И так далее. Значит, всегда были только равные числа, что противоречит условию.

8. Натуральное число можно умножать на два и произвольным образом переставлять в нем цифры (запрещается лишь ставить ноль на первое место). Можно ли превратить число 1 в число 631 с помощью таких операций?

Ответ: можно.

Решение. Возможная цепочка такова:

$$(631 \rightarrow 316 \rightarrow 158 \rightarrow 518 \rightarrow 259) \rightarrow 592 \rightarrow 296 \rightarrow 962 \rightarrow 481 \rightarrow 184 \rightarrow 92 \rightarrow 46 \rightarrow 23 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Скобками отмечена цепочка, которая должна быть в любом варианте.

Комментарий. Обычно, пример быстро не получается.