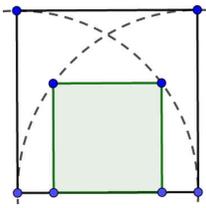


Блок 2. Геометрия

Интернет-карусель 2022–2023

Задания

1. Дан квадрат со стороной 60. Внутри него построили квадрат, как показано на рисунке. Две его вершины лежат на стороне данного квадрата, две другие — на окружностях с центрами в вершинах квадрата и радиусом, равным стороне квадрата. Найдите площадь меньшего квадрата.


2. Дан четырёхугольник $ABCD$. При каких из указанных условий его вершины лежат на одной окружности?

 - (1) Углы ABC и ADC равны.
 - (2) Углы ABD и ACD равны.
 - (3) У четырёхугольника $ABCD$ есть два прямых угла.
 - (4) Равны углы A, C и равны углы B, D .
 - (5) Равны углы A, B и равны углы C, D .
3. Одна из сторон треугольника в 12 раз больше проведенной к ней высоты, а вторая сторона — в 3 раза меньше проведенной к ней высоты. Во сколько раз первая сторона больше второй?
4. Дан параллелограмм $ABCD$; точка E — середина BC , точка M — пересечение медиан треугольника BCE . Пусть $\vec{AD} = 6\vec{x}$, $\vec{AE} = 12\vec{y}$, $\vec{AM} = a\vec{x} + b\vec{y}$. Найдите $a + b$.
5. На боковой стороне AD трапеции $ABCD$ отмечена точка K так, что $AK : KD = 3 : 2$. Основание AB вдвое больше основания DC . Через точку K проведена прямая, делящая площадь трапеции в отношении $3 : 1$ и пересекающая сторону BC в точке L . Найдите $BL : LC$.
6. Даны прямоугольные треугольники ABC и ABD с общей гипотенузой AB ; точка M — середина AB . Сколько градусов составляет угол CDM , если углы BAC и BAD равны соответственно 24 и 36 градусов?
7. Площадь квадрата $ABCD$ равна 72. Точка P такова, что $BP = 5$, $DP = 13$. Прямые DC и BP пересекаются в точке K . Найдите BK .
8. Биссектрисы углов B и D четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K . Известно, что точка K лежит на диагонали AC .

Какие из утверждений про четырёхугольник $ABCD$ являются верными?

 - (1) Четырёхугольник $ABCD$ — трапеция.
 - (2) Четырёхугольник $ABCD$ имеет ось симметрии.

- (3) Если биссектрисы углов A и C пересекаются в некоторой точке P , то эта точка принадлежит диагонали BD .
- (4) В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.
- (5) Если биссектрисы внешних углов при вершинах B и D пересекаются в некоторой точке Q , то точка Q лежит на прямой AC .
- (6) Равны произведения длин противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$.
9. На биссектрисе AK треугольника ABC отмечена такая точка F , что $BF = BK$. Луч BF пересекает сторону AC в точке L . Найдите длину BL , если $AB = 8$, $BC = 12$, $AL = 6$.
10. Даны точки и их координаты $A(8; 31)$, $B(2; 17)$, $C(-11; -14)$, $E(17; 81)$, $G(7; 3)$, $F(3; 22)$. Точка $D(x; y)$ такова, что точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма и точки F, G, E, D тоже являются вершинами параллелограмма. Найдите $x + y$.
11. На зачёте по геометрии ученикам 9 «М» класса, помимо прочего, предложили дописать формулировку теоремы Менелая. Начало предложено такое:

«Точки P, Q и R , отмеченные на сторонах или продолжениях соответственно сторон BC, CA и AB треугольника ABC и не совпадающие с его вершинами, лежат на одной прямой в том и только том случае, когда...»

Разными учениками были предложены такие варианты:

- (1) $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$; (2) $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1$;
- (3) $\frac{\vec{AR}}{RB} \cdot \frac{\vec{BP}}{PC} \cdot \frac{\vec{CQ}}{QA} = 1$; (4) $\frac{\vec{AR}}{RB} \cdot \frac{\vec{BP}}{PC} \cdot \frac{\vec{CQ}}{QA} = -1$;
- (5) $\frac{\vec{RA}}{RB} \cdot \frac{\vec{PB}}{PC} \cdot \frac{\vec{QC}}{QA} = 1$; (6) $\frac{\vec{RA}}{RB} \cdot \frac{\vec{PB}}{PC} \cdot \frac{\vec{QC}}{QA} = -1$;
- (7) $\vec{AR} \cdot \vec{BP} \cdot \vec{CQ} + \vec{RB} \cdot \vec{PC} \cdot \vec{QA} = 0$;
- (8) $\vec{AR} \cdot \vec{BP} \cdot \vec{CQ} = \vec{RB} \cdot \vec{PC} \cdot \vec{QA}$.

Какие из вариантов дают верное утверждение?

12. Точки A, B, C и D лежат на прямой в указанном порядке. Точки M, N и K лежат с одной стороны от этой прямой, причем треугольники ABM, BCN и CDK равносторонние, а их площади соответственно равны 9, 1 и 4. Найдите площадь треугольника MNK .