

Блок 1. Текстовые задачи

Интернет-карусель (2022–2023)

Ответы, указания, решения

1. За 4 часа Дарья съедает больше 42 конфет, а за 7 часов — меньше 81. Дарья ест с конфеты с постоянной скоростью и за час съедает целое число конфет. Сколько конфет съедает Дарья за 5 часов?

Ответ: 55.

Решение. За час Дарья съедает не менее 11 конфет (так как $10 \cdot 4 < 42$), но не более 11 (так как $7 \cdot 12 > 81$). Значит, за час она съедает 11 конфет, за 5 часов — 55 конфет.

2. Петя на доске написал 7 подряд идущих чисел. Вася стёр одно из них. Сумма оставшихся чисел равна 2022. Какое число стёр Вася?

Ответ: 337.

Указание: были числа 334, 335, 336, 338, 339, 340, $2022 : 6 = 337$.

Решение 1. Подходит случай, когда были выписаны числа от 334 до 340, а стёрли число 337. Действительно, сумма чисел 334, 335, 336, 338, 339, 340 равна 2022. Докажем, что ответ единственный. Это можно сделать, например, следующим образом.

Если самое маленькое из чисел на доске было 333 (или меньше), то сумма чисел не более $334 + 335 + 336 + 337 + 338 + 339 = 2019 < 2022$ (сложили наибольшие возможные числа, которые могли остаться).

Если самое маленькое число было 335 (или больше), то сумма не менее $335 + 336 + 337 + 338 + 339 + 340 = 2025 > 2022$ (сложили наименьшие возможные числа, которые могли остаться).

Значит, числа на доске начинались с 334. Не трудно подсчитать, что из чисел 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340 надо убрать именно 337, чтобы сумма оставшихся была 2022.

Решение 2. Пусть на доске были числа $n, n + 1, \dots, n + 6$, стёрли число $n + r$, где r — одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сумма оставшихся чисел равна $6n + 21 - r$, здесь $21 - r$ равно 15, 16, ..., 21. Так как 2022 кратно 6, то $21 - r$ делится на 6. Подходит только 18, $r = 3$. Значит, $6n + 18 = 2022, n = 334$.

Значит, стёрли число $n + r = n + 3 = 334 + 3 = 337$.

3. Два агентства продают квартиры в новом доме. Все квартиры в доме одинаковы. Первое агентство продает квартиры по цене 4000 рублей за кв. м и берет комиссию за свои услуги в размере 50000 рублей. Второе агентство продает квартиры по цене 4200 рублей за кв. м, а услуги агентства обходятся покупателю в 10000 рублей. Клиент, желающий купить квартиру, обнаружил, что ему все равно, у кого покупать квартиру, потому что он заплатит в итоге ту же сумму. Сколько **тысяч рублей** он заплатит за покупку?

Ответ: 850.

Решение. Пусть покупают n кв. м. Тогда агентствам заплатили $4000n + 50000$ и $4200n + 10000$ рублей. Из равенства $4000n + 50000 = 4200n + 10000$, имеем $200n = 40000, n = 200$. Клиент заплатит $4000 \cdot 200 + 50000 = 850\,000$ рублей.

4. На слёт молодых семей собралось много людей. По результатам анкетирования оказалось, что ровно треть из них — несовершеннолетние (им менее 18 лет), 35 % — в возрасте от 30 до 40 лет, никого старше 40 лет нет. Суммарный возраст всех людей ровно 4000 лет. Сколько людей могло быть на этом слёте?

Ответ: 180, 240.

Решение. Из условия следует, что ровно $1/3$ и ровно $7/20$ от общего числа людей — целые числа, значит, количество людей кратно 60.

Пусть всего $60t$ человек: $20t$ человек — от 0 до 17 лет, $21t$ человек — от 30 до 40 лет, остальные $19t$ человек — от 18 до 29 лет.

Максимальный суммарный возраст равен $17 \cdot 20t + 40 \cdot 21t + 29 \cdot 19t = 1731t$. Значит, $4000 \leq 1731t$, откуда $t \geq 3$.

Минимальный суммарный возраст равен $0 \cdot 20t + 21 \cdot 30t + 18 \cdot 19t = 972t$. Значит, $4000 \geq 972t$, откуда $t \leq 4$.

Вывод: $t = 3$ или $t = 4$, всего было $60t$ человек, то есть 180 или 240. Не трудно проверить, что оба значения возможны.

5. Тимоша в каждую белую клетку шахматной доски вписал натуральное число a , в каждую чёрную клетку — натуральное число b , отличное от a . В каждом квадрате 3×3 сумма чисел более 160. В каждом квадрате 5×5 сумма чисел менее 452. Чему равна сумма чисел в каждом квадрате 4×4 ?

Ответ: 288.

Указание: найдите, что $a = 17, b = 19$.

Решение. Пусть $a < b$. Сумма в квадрате 3×3 наименьшая, если в нём 5 чисел a и 4 числа b , отсюда $5a + 4b > 160$. Сумма в квадрате 5×5 наибольшая, если в нём 13 чисел b и 12 чисел a , отсюда $12a + 13b < 452$.

(1) Оценим число b , избавившись от a : $60a + 48b > 160 \cdot 12$, $60a + 65b < 452 \cdot 5$, отсюда $17b < 452 \cdot 5 - 160 \cdot 12 = 340$, $b < 20$.

(2) Оценим число a , избавившись от b : $65a + 52b > 160 \cdot 13$, $48a + 52b < 452 \cdot 4$, отсюда $17a > 160 \cdot 13 - 452 \cdot 4 = 272$, $a > 16$.

Из этого однозначно следует, что $a = 17$, $b = 19$. Сумма в квадрате 4×4 равна $8 \cdot (17 + 19) = 288$.

6. Ваня хвастается, как он быстро едет на велосипеде. Петя хвастается, как он быстро ходит пешком. Ваня сказал Пете: «Я за 2 часа проеду как минимум на 28 км больше, чем ты пройдёшь за 5 часов!». Петя ответил: «За 12 минут ты проедешь не более чем на 2,8 км больше, чем я пройду за полчаса!». Сегодня Ваня ехал полчаса, Петя шёл 75 минут. На сколько км Ваня проехал больше, чем прошёл Петя?

Ответ: 7.

Решение. Заметим, что 2 часа больше 12 минут в 10 раз, 28 км больше 2,8 км в 10 раз и 5 часов больше получаса в 10 раз. Значит, за 12 минут Ваня проедет дальше, чем пройдёт Петя, не более чем на 2,8 км и не менее чем на 2,8 км, то есть ровно на 2,8 км дальше.

Далее заметим, что полчаса : 12 мин = 75 мин : полчаса = $5/2$, поэтому разрыв будет равен $2,8 \text{ км} \cdot 5/2 = 7 \text{ км}$.

7. Сумма двух трехзначных чисел равна 910. А если второе слагаемое записать теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится сумма 217. Найти первое число.

Ответ: 109.

Указание: $109 + 801 = 910$, $109 + 108 = 217$.

Решение. Пусть первое слагаемое равно n , второе — \overline{abc} .

Из условия $n + \overline{abc} = 910$, $n + \overline{cba} = 217$.

Тогда $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c) = 910 - 217 = 693$, $a - c = 7$. Значит, второе число — либо $\overline{8b1}$ или $\overline{9b2}$. Во втором случае первое слагаемое не трёхзначное. Значит, второе слагаемое равно $\overline{8b1}$. Тогда $n + \overline{8b1} = 910$, $n + 10b = 109$. Число n трёхзначное только при $b = 0$. Получаем $n = 109$.

8. Мама принесла из магазина персики и апельсины (и то, и другое имеется). Тима съел $1/3$ часть всех персиков и $1/5$ часть всех апельсинов. Какое наибольшее количество фруктов могла принести мама, если Тима съел 4 фрукта?

Ответ: 18.

Решение. На каждый персик, съеденный Тимой, приходится 3 купленных мамой, на каждый апельсин — 5 апельсинов. Мама купила наибольшее количество, если Тима съел как можно больше апельсинов. Значит, он съел 3 апельсина и 1 персик. Куплено $3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 18$ фруктов.

9. Мама принесла из магазина персики и апельсины (и то, и другое имеется). Тима съел $1/3$ часть всех персиков и $1/5$ часть всех апельсинов. Сколько фруктов мог съесть Тима, если мама принесла 33 фрукта?

Ответ: 7 или 9.

Указание: $1 + 6 = 7$ или $6 + 3 = 9$.

Решение. Число персиков делится на 3, число апельсинов — на 5. Надо число 33 представить в виде двух натуральных слагаемых, одно из которых кратно 3, другое — кратно 5. Это возможно только как $33 = 3 + 30$ и $18 + 15$. В первом случае Тима съел 1 персик и 6 апельсинов (всего 7 фруктов), во втором — 6 персиков и 3 апельсина (всего 9 фруктов).

10. Мама принесла из магазина яблоки и груши (и то, и другое имеется). Лёня съел $1/4$ часть всех яблок и $1/6$ часть всех груш. При каком общем количестве купленных фруктов можно однозначно определить, сколько фруктов съел Лёня?

Ответ: 10, 14, 16, 18, 20, 24.

Решение. Пусть Лёня съел более 3 яблок. Общее количество купленных фруктов не изменится, если вместо 3 яблок он съест 2 груши. Действительно, 3 съеденным яблоком соответствуют $3 \cdot 4 = 12$ купленных яблок, а 2 съеденным грушам — $2 \cdot 6 = 12$ купленных груш. Тогда общее число фруктов то же, а количество съеденных фруктов уменьшится на 1. Значит, Лёня съел 1, 2 или 3 яблока.

Пусть Лёня съел более 2 груш. Общее количество купленных фруктов не изменится, если вместо 2 груш он съест 3 яблока. Тогда общее число фруктов то же, а количество съеденных фруктов увеличится на 1. Значит, Лёня съел 1 или 2 груши.

Вывод: количество съеденных яблок и груш может быть 1 и 1, 1 и 2, 2 и 1, 2 и 2, 3 и 1, 3 и 2. Тогда было куплено $4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 10$, $4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 16$, $4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 14$, $4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 20$, $4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 18$, $4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 24$. Не трудно проверить, что все эти варианты подходят.

11. У Тимоши 10 кубиков. Каждая грань кубика белая, синяя или красная. Всего на кубиках 32 синих и 19 красных граней. У 9 кубиков три грани одного цвета и три — другого. Сколько синих граней у десятого кубика?

Ответ: 5.

Решение. На каждом из первых 9 кубиков число синих и красных граней кратно трём, а синих граней не более $9 \cdot 3 = 27$. Значит, на 10-м кубике по крайней мере $32 - 27 = 5$ синих граней и 1 красная грань (так как 19 даёт остаток 1 при делении на 3), откуда следует, что на нём ровно 5 синих граней и 1 красная грань.

12. Стандартную траншею 10 солдат и 8 генералов могут вырыть за 50 дней, а 15 солдат и 20 генералов — за 30 дней. За сколько дней такую траншею выроют 12 генералов?

Ответ: 200.

Решение 1. Уравняем количество солдат и количество дней.

Из первого условия 5 солдат и 4 генерала роют траншею за 100 дней, тогда 15 солдат и 12 генералов за 100 дней роют 3 траншеи, а за 300 дней — 9 траншей.

Из второго условия 15 солдат и 20 генералов за 300 дней роют 10 траншей.

Сравнивая, получаем: $20 - 12 = 8$ генералов за 300 дней роют $10 - 9 = 1$ траншею. Тогда $12 = 3/2 \cdot 8$ генералов выроют траншею за $300 : (3/2) = 200$ дней.

Решение 2. Пусть a и b — доли траншеи, которую вырывает соответственно один солдат и один генерал за 1 день.

Из условия $10a + 8b = 1/50$, $15a + 20b = 1/30$.

Отсюда $3(10a + 8b) - 2(15a + 20b) = 3/50 - 2/30$, $16b = 1/150$, $12b = 1/200$, откуда следует ответ 200.

13. Каково натуральное число, составляющее 158 % двузначного числа?

Ответ: 79.

Решение. Пусть искомое число равно N . Тогда $100N/158 = 50N/79$ — двузначное число. Так как $\text{НОД}(25; 39) = 1$, то N кратно 79.

Если $N = 79t$, то оно составляет 158 % двузначного числа $50t$, откуда $t = 1$. Искомое число 79.

14. Каково натуральное число, составляющее 156 % двузначного числа?

Ответ: 39, 78, 117.

Решение. Пусть искомое число равно N . Тогда $100N/156 = 25N/39$ — двузначное число. Так как $\text{НОД}(25; 39) = 1$, то N кратно 39.

Если $N = 39t$, то оно составляет 156 % двузначного числа $25t$, откуда t равно 1, 2 или 3. Искомое число $39 \cdot 1 = 39$, $39 \cdot 2 = 78$ или $39 \cdot 3 = 117$.

Источник: предложил Д. А. Калинин (сентябрь 2022).

15. Швея может сшить форму для 10 солдат и 8 генералов за 30 дней, а для 15 солдат и 20 генералов — за 50 дней. Сколько дней потребуется швее, чтобы сшить форму для 12 генералов?

Ответ 7,5.

Решение. Уравняем количество солдат: на форму для 30 солдат и 24 генералов уйдёт 90 дней, для 30 солдат и 40 генералов — 100 дней. Значит, на форму для $40 - 24 = 16$ генералов уходит $100 - 90 = 10$ дней. На форму для 16 генералов уйдёт $10 \cdot 12/16 = 10 \cdot 3/4 = 7,5$ дней.