

Блок 6. Ребусы

Подготовительное занятие

Задания

- Замените звёздочки цифрами, чтобы равенства стали верными:
(а) $5* + *84 = ***0$;
(б) $** + * = **8$;
(в) $6*5* - *8*4 = 2856$.
 - Решите ребусы:
(а) Б + БЕЕЕ = МУУУ;
(б) ДРАМА + ДРАМА = ТЕАТР;
(в) ЧАЙ : АЙ = 5.
Решить ребус — заменить буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным. При этом одинаковые буквы заменяются равными цифрами, а разные буквы — разными цифрами.
1. Сколькими способами можно заменить звездочки цифрами, чтобы равенства стали верными:
(а) $3*86 + *2*7 = 804*$;
(б) $5927 + **45 + 78** = 1821*?$
 2. Решите ребус: АВА + ВАВ = ВВВС.
 3. Решите ребус: В + АААА + АААА + АААА = ВАААА.
 4. Решите ребус: ПЧЁЛКА · 7 = ЖЖЖЖЖЖ.
 5. Сумма двух натуральных чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получим второе число. Найдите эти числа.
 6. Решите ребус: ОДИН + ОДИН = МНОГО.
 7. Замените звёздочки десятью различными цифрами так, чтобы все три равенства были верными: $* + * = **$, $* + * = *$, $* + * = *$.
 8. При каком наименьшем числе слагаемых имеет решение ребус
СТУК + СТУК + ... + СТУК = АААААА?

Блок 6. Ребусы

Подготовительное занятие

Задания

- Замените звёздочки цифрами, чтобы равенства стали верными:
(а) $5* + *84 = ***0$;
(б) $** + * = **8$;
(в) $6*5* - *8*4 = 2856$.
 - Решите ребусы:
(а) Б + БЕЕЕ = МУУУ;
(б) ДРАМА + ДРАМА = ТЕАТР;
(в) ЧАЙ : АЙ = 5.
Решить ребус — заменить буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным. При этом одинаковые буквы заменяются равными цифрами, а разные буквы — разными цифрами.
1. Сколькими способами можно заменить звездочки цифрами, чтобы равенства стали верными:
(а) $3*86 + *2*7 = 804*$;
(б) $5927 + **45 + 78** = 1821*?$
 2. Решите ребус: АВА + ВАВ = ВВВС.
 3. Решите ребус: В + АААА + АААА + АААА = ВАААА.
 4. Решите ребус: ПЧЁЛКА · 7 = ЖЖЖЖЖЖ.
 5. Сумма двух натуральных чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получим второе число. Найдите эти числа.
 6. Решите ребус: ОДИН + ОДИН = МНОГО.
 7. Замените звёздочки десятью различными цифрами так, чтобы все три равенства были верными: $* + * = **$, $* + * = *$, $* + * = *$.
 8. При каком наименьшем числе слагаемых имеет решение ребус
СТУК + СТУК + ... + СТУК = АААААА?

Указания, ответы и решения

Математический или числовой ребус — это логическая головоломка, представляющая собой примеры простых арифметических действий, в которых часть или все цифры заменены на точки, звездочки, буквы или другие символы. Решить ребус — означает восстановить первоначальный вид математического равенства.

Разбирая вводные задания, полезно выделить несколько идей, за счёт которых удобно решать ребусы.

- ✓ Идея 1. Запишите пример в виде вычисления столбиком.
- ✓ Идея 2. Отслеживайте, когда происходит перенос разряда.
- ✓ Идея 3. Если в сумме больше разрядов, то можно понять, первые цифры слагаемых.
- ✓ Идея 4. Если достаточно перебрать разумное число вариантов, то надо перебирать.

Вводные задания. Предлагаем продемонстрировать ученикам эти идеи на примере решения вводных заданий. Можно предложить (1) найти ответы к первым трём ребусам (со звездочками), затем обсудить способы поиска их решений. Затем предложить (2) найти ответы ко второй тройке ребусов (с буквами), затем также обсудить способы поиска их решений.

- Замените звёздочки цифрами, чтобы равенства стали верными:

(а) $5* + *84 = ***0$;

(б) $** + * = **8$;

(в) $6*5* - *8*4 = 2856$.

(а) Ответ: $56 + 984 = 1040$.

Решение. Запишем пример в виде сложения столбиком (идея 1) и начнём восстанавливать цифры.

$$\begin{array}{r} + \quad 5 * \\ * * * 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 5 6 \\ * * * 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 5 6 \\ * * 4 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 5 6 \\ * * 4 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 5 6 \\ * * 4 0 \\ \hline 1 0 4 0 \end{array}$$

- (1) Легко восстановить неизвестную цифру в разряде единиц.
- (2) Восстанавливаем неизвестную цифру в разряде десятков, не забывая (идея 2) перенос разряда из единиц в десятки.
- (3) Чтобы в сумме возник разряд тысяч, второе слагаемое в разряде сотен (идея 3) должно иметь цифру «9».

(б) Ответ: $99 + 9 = 108$.

Решение 1. Запишем пример в виде сложения столбиком (идея 1) и начнём восстанавливать цифры.

$$\begin{array}{r} + \quad * * \\ * * 8 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 9 * \\ 1 0 8 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 9 9 \\ 1 0 8 \\ \hline \end{array}$$

В отличие от предыдущего случая, удобно восстановить (идея 3) первые цифры чисел: для возникновения разряда сотен, нужно поставить цифры 1, 0 и 9, как показано выше.

Из разряда единиц в разряд десятков должен быть переход (идея 2), поэтому сумма цифр в разряде единиц равна 18, то есть, это $9 + 9$.

Решение 2. Наибольшая сумма двузначного и однозначного слагаемых равна $99 + 9 = 108$. Наименьшая сумма вида $**8$ равна 108. Значит, пример однозначно определяется: $99 + 9 = 108$.

Комментарий. Идея оценки разных частей равенства иногда помогает гораздо лучше, чем восстановление по цифрам.

(в) Ответ: $6750 - 3894 = 2856$.

Решение. Запишем пример в виде сложения столбиком (идея 1), а затем перепишем его как пример на сложение. Последовательное восстановление цифр показано ниже:

$$\begin{array}{r} - \quad 6 * 5 * \\ * 8 * 4 \\ \hline 2 8 5 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 2 8 5 6 \\ * 8 * 4 \\ \hline 6 * 5 * \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 2 8 5 6 \\ * 8 * 4 \\ \hline 6 * 5 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 2 8 5 6 \\ * 8 9 4 \\ \hline 6 * 5 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 2 8 5 6 \\ * 8 9 4 \\ \hline 6 7 5 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 2 8 5 6 \\ 3 8 9 4 \\ \hline 6 7 5 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} - \quad 6 7 5 0 \\ 3 8 9 4 \\ \hline 2 8 5 6 \end{array}$$

Замечание. Можно рассуждать с примером на вычитание, каждый раз замечая, что занимается единица из более высокого разряда.

- В конце разбора вводных заданий стоит обратить внимание учеников, что
- (1) Если ребус имеет несколько решений, то нужно найти ВСЕ решения.
 - (2) Решить задачу с ребусом — ПОКАЗАТЬ, КАК восстановить цифры. Это докажет, что полученный ответ — единственный.

- Решите ребусы:
 - (а) Б + ББББ = МУУУ;
 - (б) ДРАМА + ДРАМА = ТЕАТР;
 - (в) ЧАЙ : АЙ = 5.

Решить ребус — заменить буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным. При этом одинаковые буквы заменяются равными цифрами, а разные буквы — разными цифрами.

(а) Ответ: $1 + 1999 = 2000$.

Решение. (1) Цифра Б в разряде тысяч изменилась на М, значит, $E = 9$. (2) Тогда $У = 0$. Тогда (из разряда единиц) $Б = 1$, откуда $М = 2$.

Последовательность замен показана ниже:

$$\begin{array}{r} + \text{Б Е Е Е} \\ \text{М У У У} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \text{Б 9 9 9} \\ \text{М У У У} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \text{Б 9 9 9} \\ \text{М 0 0 0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \text{1 9 9 9} \\ \text{2 0 0 0} \end{array}$$

(б) Ответ: $18969 + 18969 = 37938$.

Указание. Найдите букву, которую можно однозначно заменить цифрой.

Решение. (1) Сумма $A + A$ в разряде сотен даёт А, в разряде единиц даёт Р. В разряде единиц нет переноса разряда. Значит, $A + A$ в разряде сотен даёт А с переносом разряда. Перебором можно обнаружить, что такая цифра только одна: $A = 9$.

(2) Тогда определяется $P = 8$. Затем определяется $E = 7$.

(3) Сумма $M + M$ должна давать перенос разряда. Значит, $M = 5$ или $M = 6$. Так как $M + M$ даёт ту же сумму, что $D + D$, то в первом случае $D = 0$ (это невозможно), во втором — $D = 1$.

Последовательность замен показана ниже:

$$\begin{array}{r} + \text{Д Р А М А} \\ \text{Т Е А Т Р} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \text{Д Р 9 М 9} \\ \text{Т Е 9 Т Р} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \text{Д 8 9 М 9} \\ \text{Т Е 9 Т 8} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} + \text{Д 8 9 М 9} \\ \text{Т 7 9 Т 8} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \text{1 8 9 6 9} \\ \text{3 7 9 3 8} \end{array}$$

Получили единственный возможный вариант замены.

(в) Ответ: $125 : 25 = 5$, $250 : 50 = 5$, $375 : 75 = 5$.

Решение. Перепишем как пример на умножение: $5 \cdot \text{АЙ} = \text{ЧАЙ}$. Видно, что $\text{Й} = 0$ или $\text{Й} = 5$. Далее можно действовать двумя способами.

(1) Перебор (идея 4). Для каждого случая ($\text{Й} = 0$ или $\text{Й} = 5$) можно выписать 9 вариантов, когда А равно от 1 до 9 и выбрать из них верные.

(2) Преобразования. Заметим, что $5 \cdot \text{АЙ} = \text{ЧАЙ} = 400 + \text{АЙ}$, откуда $400 = 4 \cdot \text{АЙ}$. Так как АЙ — двузначное, то Ч равно 1, 2 или 3. Для каждого значения Ч находим значение ЧАЙ: 125, 250, 375.

Получаем три решения, указанные в ответе.

Комментарий. Обратите внимание учеников, что если в решении делается перебор, то его стоит представлять в решении задачи целиком. Иначе решение будет неполным.

Основные задачи. В решениях задач, в отличие от предыдущих, не будут представлены последовательности замен. Выпишите их со своими учениками самостоятельно.

1. Сколькими способами можно заменить звездочки цифрами, чтобы равенства стали верными:

(а) $3*86 + *2*7 = 804*$;

(б) $5927 + **45 + 78** = 1821*$

(а) Ответ: 1 вариант.

Указание. Однозначно восстанавливается пример $3786 + 4257 = 8043$.

(б) Ответ: 10 вариантов.

Указание. Из разряда десятков в разряд сотен в любом случае переносится 1. Тогда однозначно определяются недостающие цифры во всех разрядах, кроме разряда единиц: $5927 + 4445 + 78** = 1821*$. Вместо звездочки в разряде единиц слагаемого может быть любая цифра от 0 до 9. В каждом из этих вариантов есть одно решение. Итого 10 вариантов.

десятков переносится 1 или 2. В зависимости от этого есть 2 варианта неизвестной цифры в разряде десятков. В каждом случае остальные восстанавливаются однозначно.

2. Решите ребус: $\text{АВА} + \text{ВАВ} = \text{ВВВС}$.

Ответ: $919 + 191 = 1110$.

Решение. Так как в сумме возник разряд тысяч, то $\text{В} = 1$. Так как $\text{А} + \text{В}$ до давать перенос разряда, то $\text{А} = 9$. Отсюда следует, что $\text{С} = 0$.

3. Решите ребус: $\text{В} + \text{АААА} + \text{АААА} + \text{АААА} = \text{ВАААА}$.

Ответ: $2 + 9999 + 9999 + 9999 = 29999$.

Решение. Получаем $B + AAAAA + AAAAA = B0000$. Так как в сумме возник новый разряд, то $B = 1$ или $B = 2$.

Если $B = 1$, то $1 + AAAAA + AAAAA = 10000$. Такое невозможно, так как слева получается нечётное число, а справа — четное.

Если $B = 2$, то $2 + AAAAA + AAAAA = 20000$, откуда $AAAAA = 19998 : 2 = 9999$.

Получаем ответ.

4. Решите ребус: ПЧЁЛКА · 7 = ЖЖЖЖЖЖ.

Ответ: $142857 \cdot 7 = 999\ 999$.

Решение. Шестизначное число ЖЖЖЖЖЖ после деления на 7 остается шестизначным. Значит, оно начиналось с цифры 7, 8 или 9:

(1) если Ж = 7, то $111111 \cdot 7 = 777\ 777$,

(2) если Ж = 8, то $126984 \cdot 7 = 888\ 888$,

(3) если Ж = 9, то $142857 \cdot 7 = 999\ 999$.

Подходит только последний вариант, так как в первом варианте все цифры одинаковые, а во втором получается, что К и Ж равны 8.

5. Сумма двух натуральных чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получим второе число. Найдите эти числа.

Ответ: $431 + 43 = 474$.

Решение. Запишем условие как ребус: $AB1 + AB = 474$ (но здесь возможно $A = B$). Из разряда единиц видно, что $B = 3$. Получаем $A31 + A3 = 474$. Из разряда десятков видно, что $A = 4$.

6. Решите ребус: ОДИН + ОДИН = МНОГО.

Ответ: $6823 + 6823 = 13646$.

Решение. Так как при сложении возник новый разряд, то $M = 1$, $O + O$ не менее 9. Поэтому O равно 5, 6, 7, 8 или 9. Из разряда единиц следует, что O — чётная цифра. Значит, $O = 6$ или $O = 8$.

Из разряда тысяч следует, что N равно 2, 3 (при $O = 6$) или 6, 7 ($O = 8$):

$6ДИ2 + 6ДИ2 = 126Г6$, $6ДИ3 + 6ДИ3 = 136Г6$,

$8ДИ6 + 8ДИ6 = 168Г8$, $8ДИ7 + 8ДИ7 = 178Г8$.

В разряде единиц нет противоречий только в варианте $6ДИ3 + 6ДИ3 = 136Г6$.

Должно выполняться $Д + Д = 16$, значит, $Д = 8$.

Получаем: $68И3 + 68И3 = 136Г6$.

Должно выполняться $И + И = Г$, остались цифры 0, 2, 4, 5, 7, 9. Видно, что подходит только $И = 2$, $Г = 4$.

7. Замените звёздочки десятью различными цифрами так, чтобы все три равенства были верными: $* + * = **$, $* + * = *$, $* + * = *$.

Ответ: $4 + 6 = 10$, $5 + 3 = 8$, $2 + 7 = 9$ или $7 + 3 = 10$, $2 + 6 = 8$, $4 + 5 = 9$.

Решение. Цифра «0» может быть использована только второй в двузначной сумме. Цифра 9 — значение суммы, так как невозможно $9 + 1 = 10$.

Получаем: $* + * = 10$, $* + * = *$, $* + * = 9$.

Цифра 8 может быть либо слагаемым в первом примере, либо суммой во втором примере.

Случай 1. Если имеем $8 + 2 = 10$, $* + * = *$, $* + * = 9$, то остаются цифры 3, 4, 5, 6, 7. Вторым примером возможен только $3 + 4 = 7$, но $5 + 6 \neq 9$. Поэтому, в этом случае решения нет.

Случай 2. Если имеем $* + * = 10$, $* + * = 8$, $* + * = 9$, то остаются цифры 2, 3, 4, 5, 6, 7. Цифру 7 суммировали с 2 или 3. Рассмотрим оба подслучая:

Случай 2.1. Если имеем $* + * = 10$, $* + * = 8$, $7 + 2 = 9$, то остаются цифры 3, 4, 5, 6. Не трудно понять, что возможно только $6 + 4 = 10$, $3 + 5 = 8$, $7 + 2 = 9$.

Случай 2.1. Если имеем $7 + 3 = 10$, $* + * = 8$, $* + * = 9$, то остаются цифры 2, 4, 5, 6. Не трудно понять, что возможно только $7 + 3 = 10$, $2 + 6 = 8$, $4 + 5 = 9$.

8. При каком наименьшем числе слагаемых имеет решение ребус $СТУК + СТУК + \dots + СТУК = AAAAAA$?

Ответ: 13.

Указание. Найти наименьшее число слагаемых — это означает, что нужно найти «хороший» пример и доказать, что меньшего числа слагаемых не может быть.

Решение. Пусть число слагаемых равно n . Есть пример при $n = 13$: $AAAAAA = 111111$, $СТУК = 111111 : 13 = 8547$. Покажем, что нет примера с меньшим числом слагаемых.

Заметим, что $AAAAAA \geq 111111$ и $СТУК \leq 9876$. Число слагаемых не менее $111111 : 9876 > 11$, то есть, как минимум 12. Почему невозможен пример с 12 слагаемыми?

Если $n = 12$, то $AAAAAA$ — четное число. Тогда $AAAAAA \geq 222222$, $СТУК \leq 9876$, а число слагаемых не менее $222222 : 9876 > 22$. Это больше 13.