Блок 2. Комбинаторика

Интернет-карусель (2022–2023)

Задания

1. Лёня выписывает все 9-значные натуральные числа. В каждом цифры идут в порядке убывания (каждая следующая меньше предыдущей). Сколько таких чисел?
2. У Тимоши 10 яблок: восемь одинаковых зеленых, одно красное и одно жёлтое. Сколькими способами он может выложить в ряд все яблоки, чтобы между красным и желтым яблоками лежало ровно одно зеленое?
3. Назовем натуральное число «супернечётным», если все его цифры нечётны и среди них нет равных. Например, 157 — «супернечётное» число. Сколько «супернечётных» трехзначных чисел?
4. Назовем натуральное число «супернечётным», если все его цифры нечётны и среди них нет равных. Например, 157 — «супернечётное» число. Сколько «супернечётных» трехзначных чисел, в которых самая большая цифра — вторая?
5. Назовем натуральное число «суперчётным», если все его цифры чётны и среди них нет равных. Например, 820 — «суперчётное» число. Сколько существует «суперчётных» трехзначных чисел?
6. Назовем натуральное число «суперчётным», если все его цифры чётны и среди них нет равных. Например, 820 — «суперчётное» число. Сколько существует «суперчётных» трехзначных чисел, в которых самая большая цифра — вторая?
7. На слет юных патриотов собрались мальчики и девочки. Каждые двое обменялись одним рукопожатием. В итоге между девочками было 28 рукопожатий, между девочками и мальчиками — 48 рукопожатий. Сколько было рукопожатий между мальчиками?
8. На слёт юных туристов приехали мальчики и девочки — всего 120 детей. Каждый пожал руку трем другим. Рукопожатий девочки с девочкой было 28, между мальчиком и девочкой — 48. Сколько было рукопожатий мальчика с мальчиком?
9. Сколькими способами можно поставить на доску 5×5 двух одинаковых ладей, бьющих друг друга?
10. Сколькими способами можно поставить на доску 5×5 четырех одинаковых ладей так, чтобы каждая из них била двух других?
11. Сколькими способами можно поставить на доску 5×5 четырех одинаковых ладей так, чтобы каждая из них била ровно одну другую?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2022–2023 учебный год

12. В ряд записано 9 чисел: 1 1 1 1 8 8 8 8 8. Нужно в промежутки между числами поставить семь знаков сложения и один знак умножения, а затем сосчитать результат. Сколько различных результатов может получиться?
13. В ряд записано 6 чисел: 10 5 4 3 2 1. Нужно в промежутки между числами поставить три знака сложения и два знака вычитания. минуса, а затем сосчитать результат. Сколько различных результатов может получиться?
14. В танцевальном конкурсе участвуют 10 партнеров и 10 партнерш. Все партнеры и партнерши пронумерованы рейтинговыми баллами от 1 до 10. К участию в конкурсе может быть допущена пара, суммарный рейтинг которой не меньше 10 и не больше 16. Сколькими способами можно выбрать пару для участия в конкурсе?
15. На теннисный турнир заявлены 10 теннисистов, имеющих рейтинг от 1 до 10. Матч называется интересным, если суммарный рейтинг играющих теннисистов не меньше 10 и не больше 16. Сколькими способами можно выбрать двух теннисистов для проведения интересного матча?

Блок 2. Комбинаторика

Интернет-карусель (2022–2023)

Ответы, решения, указания

В решениях некоторых задач без дополнительных пояснений используется следующий факт: выбрать 2 предмета из N штук можно $N(N-1)/2$ способами.

1. Лёня выписывает все 9-значные натуральные числа. В каждом цифры идут в порядке убывания (каждая следующая меньше предыдущей). Сколько таких чисел?

   Ответ: 10.

   Решение. Такое число можно получить, выкинув любую из 10 цифр, а остальные записав в порядке убывания. Значит, всего 10 чисел.

2. У Тимоши 10 яблок: восемь одинаковых зеленых, одно красное и одно жёлтое. Сколькими способами он может выложить в ряд все яблоки, чтобы между красным и желтым яблоками лежало ровно одно зеленое?

   Ответ: 16.

   Решение. Перед тройкой разноцветных яблок может быть от 0 до 7 зелёных яблок. Тройку можно положить двумя способами. Итого 8 · 2 = 16 вариантов.

3. Назовем натуральное число «супернечётным», если все его цифры нечётны и среди них нет равных. Например, 157 — «супернечётное» число. Сколько «супернечётных» трехзначных чисел?

   Ответ: 60.

   Решение. Всего 5 нечётных цифр. Выберем 2 из них, которые не используются в записи числа, — это можно сделать 5 · 4 : 2 = 10 способами. Остальные три цифры выписать в одном из 6 порядков (если их обозначить буквами А, Б, В, то это варианты АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ и ВБА). Итого 10 · 6 = 60 чисел.

4. Назовем натуральное число «супернечётным», если все его цифры нечётны и среди них нет равных. Например, 157 — «супернечётное» число. Сколько «супернечётных» трехзначных чисел, в которых самая большая цифра — вторая?

   Ответ: 20.

   Решение. Всего 5 нечётных цифр. Выберем 2 из них, которые не используются в записи числа, — это можно сделать 5 · 4 : 2 = 10 способами. Из остальных трёх цифр самою большую поставим второй, остальные две можно поставить 2 способами. Итого 10 · 2 = 20 чисел.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2022–2023 учебный год

5. Назовем натуральное число «суперчётным», если все его цифры чётны и среди них нет равных. Например, 820 — «суперчётное» число. Сколько существует «суперчётных» трехзначных чисел?

   Ответ: 48

   Указание. В отличие от нечётных цифр (см. предыдущие задачи) здесь не любую чётную цифру можно ставить первой. Повторим рассуждения решения задачи № 3, а затем уберём лишнее.

   Решение. Всего 5 чётных цифр. Выберем 2 из них, которые не используются в записи числа, — это можно сделать 5 · 4 : 2 = 10 способами. Остальные три цифры выписать в одном из 6 порядков (если их обозначить буквами А, Б, В, то это варианты АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ и ВБА). Итого 10 · 6 = 60 вариантов.

   Среди этих 60 вариантов есть начинающиеся с цифры «0», их надо убрать. Если первая цифра «0», то вторую цифру можно выбрать 4 способами, третью — 3 способами. Всего 12 лишних способов.

   Итого 60 – 12 = 48 чисел.

6. Назовем натуральное число «суперчётным», если все его цифры чётны и среди них нет равных. Например, 820 — «суперчётное» число. Сколько существует «суперчётных» трехзначных чисел, в которых самая большая цифра — вторая?

   Ответ: 14

   Указание. В отличие от нечётных цифр (см. предыдущие задачи) здесь не любую чётную цифру можно ставить первой. Повторим рассуждения решения задачи № 4, а затем уберём лишнее.

   Решение. Решение. Всего 5 чётных цифр. Выберем 2 из них, которые не используются в записи числа, — это можно сделать 5 · 4 : 2 = 10 способами. Из остальных трёх цифр самою большую поставим второй, остальные две можно поставить 2 способами. Итого 10 · 2 = 20 вариантов.

   Среди 20 вариантов есть начинающиеся с цифры «0», их надо убрать. Если первая цифра «0», то вторую и третью цифру можно выбрать 6 способами, ставятся они однозначно: большая — в разряд десятков, меньшая — в разряд единиц. Всего 6 лишних способов.

   Итого 20 – 6 = 14 чисел.

7. На слет юных патриотов собрались мальчики и девочки. Каждые двое обменялись одним рукопожатием. В итоге между девочками было 28 рукопожатий, между девочками и мальчиками — 48 рукопожатий. Сколько было рукопожатий между мальчиками?

Ответ: 15.

Указание: было 8 девочек, 6 мальчиков.

Решение. Если друг с другом здоровались N человек, то сделано $N(N-1)/2$ рукопожатий. Не трудно понять, что $N(N-1)/2 = 28$ только при $N = 8$, поэтому девочек было 8.

Количество рукопожатий между мальчиками и девочками — произведение их количеств, поэтому мальчиков было 48 : 8 = 6. Между мальчиками было сделано $6 \cdot 5 : 2 = 15$ рукопожатий.

8. На слёт юных туристов приехали мальчики и девочки — всего 120 детей. Каждый пожал руку трем другим. Рукопожатий девочки с девочкой было 28, между мальчиком и девочкой — 48. Сколько было рукопожатий мальчика с мальчиком?

Ответ: 104.

Решение. Каждая из 120 детей сделал 3 рукопожатия, поэтому всего сделано $3 \cdot 120 : 2 = 180$ рукопожатий. Каждое рукопожатие либо между девочками (их всего 28 штук), либо между мальчиком и девочкой (их 48), либо между мальчиками. Последних 180 – 28 – 48 = 104.

9. Сколькими способами можно поставить на доску 5×5 двух одинаковых ладей, бьющих друг друга?

Ответ: 100.

Решение. Бьющие друг друга ладьи стоят на одной из 10 линий (строке или столбце). Осталось на выбранной линии выбрать 2 клетки для ладей $5 \cdot 4 : 2 = 10$ способами. Итого $10 \cdot 10 = 100$ вариантов.

10. Сколькими способами можно поставить на доску 5×5 четырех одинаковых ладей так, чтобы каждая из них била двух других?

Ответ: 100

Решение. Четырех такие ладьи, что каждая бьёт ровно двух других, можно поставить только в пересечение 2 строк и 2 столбцов. Выберем две строки $5 \cdot 4 : 2 = 10$ способами и два столбца $5 \cdot 4 : 2 = 10$ способами и в их пересечении поставим ладей. Итого $10 \cdot 10 = 100$ вариантов.

11. Сколькими способами можно поставить на доску 5×5 четырех одинаковых ладей так, чтобы каждая из них била ровно одну другую?

Ответ: 1500.

Решение. Нужно поставить на доску 2 пары бьющих друг друга ладей.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2022–2023 учебный год

Пусть в обоих парах ладьи бьют по горизонтали. Тогда 2 горизонтали выбираются $5 \cdot 4 : 2 = 10$ способами. Верхней из них выбираются 2 клетки для ладей $5 \cdot 4 : 2 = 10$ способами. На второй горизонтали остаются 3 возможных места для ладей — выбираем $3 \cdot 2 : 2 = 3$ способами два из них. Итого $10 \cdot 10 \cdot 3 = 300$ способов.

Столько же вариантов, если в обоих парах бьют по вертикали, — 300 способов.

Пусть в одной паре бьют по горизонтали, в другой — по вертикали. Выбираем горизонталь 5 способами, на ней возьмём две клетки $5 \cdot 4 : 2 = 10$ способами. Далее нужную вертикаль можно выбрать только 3 способами (на двух уже стоят ладьи первой пары). На ней нужно выбрать две клетки из 4 возможных (одна — пересечение с горизонталью, на которой уже стоят ладьи первой пары) — $4 \cdot 3 : 2 = 6$ способов. Итого $5 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 6 = 900$ способов.

Всего 300 + 300 + 900 = 1500 способов.

Комментарий. В парах ладьи могут бить друг друга либо в обоих случаях по горизонтали, либо в обоих случаях по вертикали, либо по вертикали и горизонтали. Любопытно, что количество вариантов в этих случаях равны 300, 300 и 900 — последних резко больше.

12. В ряд записано 9 чисел: 1 1 1 1 8 8 8 8 8. Нужно в промежутки между числами поставить семь знаков сложения и один знак умножения, а затем сосчитать результат. Сколько различных результатов может получиться?

Ответ: 2.

Решение. Понятно, что неважно, между какими цифрами «1» ставят знак умножения, так как результат будет тот же. Также неважно, между какими цифрами «8» стоит умножение. Остаётся заметить, что постановка знака умножения между «1» и «8» даёт тот же результат, что между цифрами «1». Вывод: всего 2 возможных результата.

Комментарий. Ответ «2» дали 95 команд, ответ «3» — 120 команд. Ответ «8» дали 84 команды — они, видимо, считали количество способов поставить знак умножения.

13. В ряд записано 6 чисел: 10 5 4 3 2 1. Нужно в промежутки между числами поставить три знака сложения и два знака вычитания. минуса, а затем сосчитать результат. Сколько различных результатов может получиться?

Ответ: 7.

Решение. Так как среди данных чисел три нечётных, то результат будет нечётным.

Минимальный результат, очевидно, равен 10 − 5 − 4 + 3 + 2 + 1 = 7, максимальный — 10 + 5 + 4 + 3 − 2 − 1 = 19. Значит, возможные значения — это 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Все их можно получить. Два из них показаны выше. Остальные здесь:
10 − 5 + 4 − 3 + 2 + 1 = 9,
10 − 5 + 4 + 3 − 2 + 1 = 11,
10 − 5 + 4 + 3 + 2 − 1 = 13,
10 + 5 − 4 + 3 + 2 − 1 = 15,
10 + 5 + 4 − 3 + 2 − 1 = 17.

14. В танцевальном конкурсе участвуют 10 партнеров и 10 партнерш. Все партнеры и партнерши пронумерованы рейтинговыми баллами от 1 до 10. К участию в конкурсе может быть допущена пара, суммарный рейтинг которой не меньше 10 и не больше 16. Сколькими способами можно выбрать пару для участия в конкурсе?

Ответ: 54.

Решение. Наглядно можно изобразить все возможные пары (без указанных ограничений) таблицей 10 × 10, где каждая строка соответствует партнёрше, а столбец — партнёру.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

На рисунке такая таблица. В каждой клетке вписана сумма рейтингов партнёров. Зелёный отмечены клетки, соответствующие парам с суммарным рейтингом от 10 до 16. Всего 54 клетки.

15. На теннисный турнир заявлены 10 теннисистов, имеющих рейтинг от 1 до 10. Матч называется интересным, если суммарный рейтинг играющих теннисистов не меньше 10 и не больше 16. Сколькими способами можно выбрать двух теннисистов для проведения интересного матча?

Ответ: 25.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2022–2023 учебный год

Решение. Составим таблицу 10 × 10, где каждому игроку соответствует строка и столбец с номерами, равными его рейтингу.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

На рисунке такая таблица. Синим отмечены клетки диагонали, которые не соответствуют парам (у них совпадают номера столбца и строки). Также синим отмечены клетки, повторяющие пару.

В каждой клетке вписана сумма рейтингов партнёров.

Зелёный отмечены клетки, соответствующие парам с суммарным рейтингом от 10 до 16. Всего 25 клеток.