

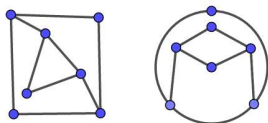
Блок 3. Графы и турниры

Интернет-карусели (2021–2022)

Задания

Граф состоит из вершин, любые две из которых либо соединены одним ребром, либо не соединены. Степень вершины — количество выходящих из неё ребер.

1. В графе 57 ребер. В нём 15 вершин степени 4, 15 вершин степени 3, остальные N вершин имеют степень 1. Чему равно N ?
2. В шахматном турнире сыграли пять шахматистов: Антонов, Борисов, Васильев, Глебов и Еленьев. Каждый с каждым сыграли ровно одну партию. За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью — 0,5 очков, за поражение — 0 очков. Антонов набрал 1 очко, Борисов — 2, Васильев — 0,5, Глебов — 3,5 очка. Какое место в турнире занял Еленьев?
3. Лёня, глядя на каркас куба, нарисовал граф. Его вершины обозначают грани куба. Вершины соединены, если соответствующие им грани соседние (имеют общее ребро). Сколько ребер получилось в графе у Лёни?
4. Лёня, глядя на каркас куба, нарисовал граф. Его вершины обозначают ребра куба. Вершины соединены ребром, если соответствующие им ребра куба имеют общую вершину. Сколько ребер получилось в графе у Лёни?
5. В футбольном турнире участвовали 5 команд, каждый две из которых сыграли друг с другом ровно один матч. За победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Все команды набрали разное число очков, а две лучшие команды в сумме набрали на 2 очка больше, чем в сумме остальные три. Сколько очков набрала команда, занявшая третье место?
6. Тимоша нарисовал *ориентированный граф*: отметил 13 точек, некоторые пары из них соединил стрелками. Между любыми двумя точками либо нет стрелок, либо одна стрелка, либо две стрелки, ведущие в разные стороны. Нет двух точек, из которых выходит поровну стрелок. Но во все точки приходит по N стрелок. Найдите N .
7. Один и тот же граф можно изобразить по-разному. Пусть даны два графа с n вершинами. Это один и тот же граф, если вершины обоих можно занумеровать числами от 1 до n так, что вершины в одном соединены ребром тогда и только тогда, когда во втором ребром соединены вершины с теми же номерами. Например, графы, изображенные на рисунке справа, одинаковы.



- Сколько существует различных графов с 5 вершинами, каждая из которых имеет степень 2 или 3?
8. В футболе за победу дают 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0 очков. Команда «Буревестник» сыграла 18 матчей и набрала 18 очков. Во сколько раз больше она проиграла матчей, чем выиграла?
 9. В графе 7 вершин. Шесть из них имеют степени 1, 2, 2, 3, 3, 4. Какую наибольшую степень может иметь седьмая вершина?
 10. Каждую вершину графа покрасили в один из двух цветов: зеленый или желтый. Из каждой желтой вершины ребра идут только в зеленые вершины. Сумма степеней всех желтых вершин равна 20. В графе ровно 12 ребер, оба конца которых зеленые. Чему равна сумма степеней всех зеленых вершин?
 11. Организаторы футбольного турнира 20 команд составляют расписание игр. Каждые две команды должны сыграть друг с другом ровно 1 раз. Игры проходят по турам, в каждом туре каждая команда играет 1 матч. На каждой игре одна команда играет «дома», а её соперник — «на выезде». Какое наибольшее количество туров у каждой команды могут чередоваться матчи «дома» и «на выезде»?
 12. В некоторой стране каждые два города соединены одной дорогой с односторонним движением. Других дорог нет. Все дороги помечены буквами Ф (федеральная) и М (местная). Из города N выходит 4 дороги, а входит в город 5 дорог. Всего в стране 20 федеральных дорог. Сколько в стране местных дорог?
 13. В шахматном турнире играют более трех шахматистов. Каждый должен сыграть одинаковое число раз. В турнире было 30 туров, с каждым туре каждый шахматист сыграл 1 партию. За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью 0,5 очков, за поражение 0 очков. После 13-го тура один из участников обнаружил, что у него нечетное число очков, а у других участников — четное число очков. Сколько шахматистов участвовало в турнире?
 14. Прошёл школьный однокруговой футбольный турнир 4 команд. Каждая команда сыграла с каждым из соперников 1 раз. В таблице приведены итоги турнира: количество побед, ничьих, поражений, число забитых и пропущенных мячей у каждой команды. Сколько мячей было забито в матче Сокол–Орел?
- | | победы | ничьи | пораж. | общий счет |
|---------|--------|-------|--------|------------|
| Ястреб | 2 | 1 | 0 | 2:0 |
| Сокол | 1 | 1 | 1 | 2:1 |
| Орел | 1 | 0 | 2 | 3:3 |
| Колибри | 0 | 2 | 1 | 0:3 |
15. В парламенте 3 левых, 4 правых депутатов и 7 центристов. На Новый Год некоторые представители разных партий обменялись конфетами. В каждом обмене участвовали два представителя разных партий. Каждый левый участвовал в 4 обменах, каждый правый — в 3-х, каждый центрист — в N разменах. Сколько обменов конфетами было между левыми и правыми, если $N > 0$?