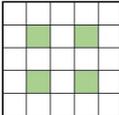


Блок 2. Логика

Задачи карусели 2021–2022

Условия задач

- На доске написаны числа: 12, 34, 46, 67, 94 и 99. Для скольких из них верная фраза «если первая цифра чётная, то вторая цифра нечётная»?
- Сколько существует двузначных чисел, для которых верно утверждение «это число не делится на 7 или в нем нет цифры 2»?
- Сколько двузначных чисел подходят под условие: «если оно нечетное, то неправда, что в его записи есть цифра 3 или нет цифры 4»?
- Оля, Коля и Вася увидели двузначное число, написанное на доске. Оля сказала: «Оно делится на 5» и «Оно делится на 6». Коля сказал: «Оно больше 36» и «Оно делится на 7». Вася сказал: «Оно состоит из одинаковых цифр» и «Оно меньше 40». Известно, что каждый один раз сказал правду и один раз соврал. Какое число могло быть написано на доске?
- На доске написаны числа: 12, 34, 46, 67, 94 и 99. Для скольких из них верная фраза «либо первая цифра чётная, либо вторая цифра нечётная»?
- На магазине «Симпл-димпл — наше всё!», повесили четыре лозунга:
 - Все дешёвое — не «поп-ит»!
 - Всё, что не «поп-ит», — дешево!
 - Все «поп-ит» недёшевы!
 - Не все «поп-ит» дешёвые!
 Вася, который только что участвовал в интернет-карусели по логике, заметил, что среди них есть лозунги, утверждающие одно и то же. Какие?
- «Сколько у тебя сегодня двоек?» — спросил Отец Крошку-Сына. «Меньше четырех», — ответил Крошка-Сын. «Меньше пяти», — добавила Мама. Оказалось, что ровно один из этих двух ответов верный. Сколько двоек получил сегодня Крошка-Сын?
- Сколько двузначных (натуральных) чисел, про которые неверна фраза «в записи числа есть нечётная цифра или цифра 8»?
- На столе лежат 5 карточек. На карточке № 1 сверху написана буква «А», на карточке № 2 — буква «Б», на карточке № 3 — число «4», на карточке № 4 — число «5», на карточке № 5 — снежинка. Какие карточки обязательно надо перевернуть, чтобы проверить, верно ли утверждение «если на одной стороне карточки написана гласная буква, то на другой стороне карточки — четное число»?

- На листе бумаги написаны четыре утверждения.
 - На этом листе ровно одно верное утверждение.
 - На этом листе ровно одно неверное утверждение.
 - Если на этом листе есть верное утверждение, то есть и неверное.
 - Если на этом листе есть неверное утверждение, то есть и верное.
 Сколько верных утверждений на этом листе бумаги?
- Какие утверждения про уравнение $Ax+B=0$, где A и B — некоторые числа, являются верными?
 - Если A не равно нулю, то уравнение имеет корень.
 - Если A равно нулю, то уравнение имеет корень.
 - Если A равно нулю, то уравнение может иметь корень.
 - Если B равно нулю, то решение уравнения — число 0.
 - Если число 0 — корень уравнения, то B равно нулю.
 - Если B равно нулю, то число 0 — корень уравнения.
- В каждой клетке доски 5×5 живёт гуманоид. В окрашенных (зеленых) клетках, как показано на рисунке, живут гуманоиды-экологи. Сколько гуманоидов могут заявить «Если у меня есть сосед-эколог, то таких соседей по крайней мере двое»?
 
- Группа из 10 малышей детского сада были на прогулке. Тимоша после прогулки сказал воспитателю: «Хотя бы два ребенка попали снежками друг в друга». Воспитатель знает, что это не правда. Какие из приведенных ниже утверждений являются верными?
 - Хотя бы три ребенка попали снежками друг в друга.
 - Ровно два ребенка попали снежками друг в друга.
 - Ровно два ребенка не попали снежками друг в друга.
 - Никто не попал друг в друга снежками.
 - Не более двух школьников попали друг в друга снежками.
 - Есть такая пара ребят, что один не попал в другого снежком.
- Пятеро ребят считают апельсины на апельсиновом дереве. «Я их насчитала больше 35» — говорит Настя. «Меньше 100, уж точно» — говорит Лена. «Где вы столько увидели, я не знаю, но их минимум 9» — говорит Олег. «Нет, только на нижних ветках 10 штук, а еще наверху есть» — говорит Денис. «Не вижу сколько, но больше 5» — говорит Миша. Трое сказали правду, а двое ошиблись. Сколько апельсинов на дереве?
- Про натуральное число N известно три факта:
 - если оно не делится на 8, то лежит между 70 и 79;
 - если оно делится на 6, то лежит между 80 и 89;
 - если оно не делится на 3, то лежит между 90 и 99.
 Чему может быть равно число N ?

Блок 2. Логика

Задачи карусели 2021–2022

Указания, ответы и решения

1. На доске написаны числа: 12, 34, 46, 67, 94 и 99. Для скольких из них верная фраза «если первая цифра чётная, то вторая цифра нечётная»?

Ответ: 5.

Указание: фраза «если А, то Б» верна, если А и Б верные или А ложно.

Решение. Во-первых, подходят числа, у которых первая цифра чётна, а вторая нечётна, — это 67. Во-вторых, подходят числа, у которых первая цифра нечётна, — это 12, 34, 94 и 99. Всего — 5 штук.

2. Сколько существует двузначных чисел, для которых верно утверждение «это число не делится на 7 или в нем нет цифры 2»?

Ответ: 87.

Решение. Всего 90 двузначных чисел. Найдем, сколько из них нам не подходят: делящиеся на 7, в которых есть цифра «2». Если цифра «2» в разряде десятков, то это 21 и 28; если цифра «2» в разряде единиц, то это 42. Не подходят 3 числа, подходят $90 - 3 = 87$ чисел.

3. Сколько двузначных чисел подходят под условие: «если оно нечетное, то неправда, что в его записи есть цифра 3 или нет цифры 4»?

Ответ: 49.

Решение. Если число чётно ($90 : 2 = 45$ чисел), то утверждение верное. Рассмотрим нечётные числа. Утверждение «в записи есть цифра 3 или нет цифры 4» неверно, если верно «в записи нет цифры 3 и есть цифра 4». Подходят 41, 45, 47, 49. Всего $45 + 4 = 49$ чисел.

4. Оля, Коля и Вася увидели двузначное число, написанное на доске. Оля сказала: «Оно делится на 5» и «Оно делится на 6». Коля сказал: «Оно больше 36» и «Оно делится на 7». Вася сказал: «Оно состоит из одинаковых цифр» и «Оно меньше 40». Известно, что каждый один раз сказал правду и один раз соврал. Какое число могло быть написано на доске?

Ответ: 35, 55, 66

Указание. Запишите утверждения в таблицу, чтоб было более удобно.

Оля	делится на 5	делится на 6
Коля	больше 36	делится на 7
Вася	из одинаковых цифр	меньше 40

Решение. Если верно первое утверждение Васи и неверно второе, то надо проверить числа 44, 55, 66, 77, 88 и 99. Под условие задачи подходят только 55 и 66.

Пусть неверно первое утверждение Васи и верно второе. Если верно первое утверждение Коли, то надо проверить числа 37, 38 и 39. Они не подходят: для каждого из них Оля оба раза сказала неправду.

Тогда достаточно рассмотреть случай, когда числа не более 36 и кратны 7: 14, 21, 28 и 35. Ни одно не кратно 6, только 35 делится на 5. Не трудно проверить, что оно также удовлетворяет условию.

5. На доске написаны числа: 12, 34, 46, 67, 94 и 99. Для скольких из них верная фраза «либо первая цифра чётная, либо вторая цифра нечётная»?

Ответ: 2.

Указание: фраза «либо А, либо Б» верна, если из А и Б верно ровно одно.

Решение. Если чётную цифру заменить буквой Ч, нечётную — буквой Н, то получатся числа вида ЧЧ, ЧН, НЧ, НН. Утверждение верно для чисел вида ЧЧ и НН. Значит, подходят числа 46, 99.

6. На магазине «Симпл-димпл — наше всё!», повесили четыре лозунга:

- (1) Все дешёвое — не «поп-ит»!
- (2) Всё, что не «поп-ит», — дешево!
- (3) Все «поп-ит» недёшевы!
- (4) Не все «поп-ит» дешёвые!

Вася, который только что участвовал в интернет-карусели по логике, заметил, что среди них есть лозунги, утверждающие одно и то же. Какие?

Ответ: 1 3

Решение. Лозунг (4) не совпадает с остальными. Он выполнен, если есть дешёвые «поп-иты», что противоречит (1) и (3). Также (4) ничего не говорит про остальные товары, а (2) говорит, что они дешевы. То есть (2) и (4) провозглашают разное.

Лозунг (2) не совпадает ни с (1), ни с (3): при (1) или (3) все «поп-ит» недешевы, а (2) выполнен при наличии некоторых дешёвых «поп-итов».

Значит, могут означать одно и то же только (1) и (3). Действительно, (1) и (3) говорят, что все «поп-иты» недешевы (а остальные товары могут быть любыми).

Комментарий. Пусть утверждение А — «этот товар — «поп-ит», утверждение Б — «этот товар — дешёвый». Тогда лозунг (1) говорит «Б → не А», лозунг (3) говорит «А → не Б». Это правда одно и то же: оба неверны в том и только том случае, когда А и Б правдивы.

7. «Сколько у тебя сегодня двоек?» — спросил Отец Крошку-Сына. «Меньше четырех», — ответил Крошка-Сын. «Меньше пяти», — добавила Мама. Оказалось, что ровно один из этих двух ответов верный. Сколько двоек получил сегодня Крошка-Сын?

Ответ: 4.

Решение. Если Мама права, то прав и Сын. Поэтому Мама права, а Сын — нет. Искомое число менее 5, но не менее 4, — это число 4.

8. Сколько двузначных (натуральных) чисел, про которые неверна фраза «в записи числа есть нечётная цифра или цифра 8»?

Ответ: 12.

Решение. Если указанная фраза неверна, то в записи нет цифры «8», а все цифры должны быть чётными. То есть в записи числа могут быть только цифры 0, 2, 4 или 6. Таких чисел $3 \cdot 4 = 12$ штук.

Комментарий. Если не верная фраза «А или Б», то верна «не А и не Б». В данной ситуации надо найти числа, про запись которых верно «нет нечётных цифр и нет цифры 8», то есть «обе цифры чётные и нет цифры 8».

9. На столе лежат 5 карточек. На карточке № 1 сверху написана буква «А», на карточке № 2 — буква «Б», на карточке № 3 — число «4», на карточке № 4 — число «5», на карточке № 5 — снежинка. Какие карточки обязательно надо перевернуть, чтобы проверить, верно ли утверждение «если на одной стороне карточки написана гласная буква, то на другой стороне карточки — чётное число»?

Ответ: 1 2 4 5

Решение. Утверждение «если на одной стороне карточки написана гласная буква, то на другой стороне карточки — чётное число» неверно, если на одной стороне гласная буква, а на другой — нечто, не являющееся чётным числом. Рассмотрим каждую из карточек.

Карточка № 1. Надо проверить: если на одной стороне «А», а на другой, например, звёздочка, то утверждение не верно.

Карточка № 2. Надо проверить: если на одной стороне «Б», а на другой окажется буква «А», то утверждение не верно.

Карточка № 3. Не нужно проверять: если на обратной стороне гласная буква, то утверждение верно. Если там что-то другое, то тоже верно.

Карточка № 4. Надо проверить: если на одной стороне «5», а на другой окажется буква «А», то утверждение не верно.

Карточка № 5. Надо проверить: если на одной стороне звёздочка, а на другой окажется буква «А», то утверждение не верно.

10. На листе бумаги написаны четыре утверждения.
– На этом листе ровно одно верное утверждение.
– На этом листе ровно одно неверное утверждение.
– Если на этом листе есть верное утверждение, то есть и неверное.
– Если на этом листе есть неверное утверждение, то есть и верное.
Сколько верных утверждений на этом листе бумаги?

Ответ: 2 или 3.

Решение. Все утверждения не могут быть верными, это противоречит утверждениям № 1 и № 2. Все утверждения не могут быть неверными, это противоречит утверждению № 3.

Если есть и верные, и неверные, то верны № 3 и № 4. Тогда неверно № 1. При этом утверждение № 2 может быть и верным, и неверным.

11. Какие утверждения про уравнение $Ax + B = 0$, где А и В — некоторые числа, являются верными?

- (1) Если $A \neq 0$, то уравнение имеет корень.
- (2) Если $A = 0$, то уравнение имеет корень.
- (3) Если $A = 0$, то уравнение может иметь корень.
- (4) Если $B = 0$, то решение уравнения — число 0.
- (5) Если число 0 — корень уравнения, то $B = 0$.
- (6) Если $B = 0$, то число 0 — корень уравнения.

Ответ: 1 3 5 6

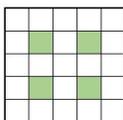
Решение. Рассмотрим каждое из утверждений.

- (1) Если $A \neq 0$, то корень уравнения $x = -B/A$. Утверждение верное.
- (2) Если $A = 0$ и $B \neq 0$, то при любом x правая часть равна нулю, а левая — нет. Утверждение неверное.
- (3) Если $A = 0$ и $B = 0$, то при любом x уравнение превращается в верное равенство. Поэтому любое число — корень уравнения. Утверждение верное.
- (3) Если $A = 0$ и $B = 0$, то при любом x уравнение превращается в верное равенство. Поэтому решение уравнения (множество всех корней) — множество всех действительных чисел. Утверждение неверное.

(5) Если число 0 — корень уравнения, то $A \cdot 0 + B = 0$ или $B = 0$. Утверждение верное.

(6) Если $B = 0$, то уравнение имеет вид $Ax = 0$. Если $x = 0$, то уравнение прекращается в верное равенство равно $A \cdot 0 = 0$ нулю. Поэтому число 0 — корень уравнения. Утверждение верное.

12. В каждой клетке доски 5×5 живёт гуманоид. В окрашенных (зеленых) клетках, как показано на рисунке, живут гуманоиды-экологи.



Сколько гуманоидов могут заявить «Если у меня есть сосед-эколог, то таких соседей по крайней мере двое»?

Ответ: 17.

Решение. Если у гуманоида нет соседа-эколога, то данное утверждение верно. Если у гуманоида есть сосед-эколог, то таких соседей должно быть не менее двух. Вывод: такое могут заявить соседи экологов, у которых нет других соседей-экологов. Это 8 клеток, отмеченные на рисунке справа крестиком.

	x		x	
x				x
x				x
	x		x	

13. Группа из 10 малышей детского сада были на прогулке. Тимоша после прогулки сказал воспитателю: «Хотя бы два ребенка попали снежками друг в друга». Воспитатель знает, что это не правда. Какие из приведенных ниже утверждений являются верными?

- (1) Хотя бы три ребенка попали снежками друг в друга.
- (2) Ровно два ребенка попали снежками друг в друга.
- (3) Ровно два ребенка не попали снежками друг в друга.
- (4) Никто не попал друг в друга снежками.
- (5) Не более двух школьников попали друг в друга снежками.
- (6) Есть такая пара ребят, что один не попал в другого снежком.

Ответ: 4 6

Решение. Если «хотя бы два ребенка попали снежками друг в друга» неверно, то никто из ребят не попал ни к кого другого. Значит, (1), (2), (5) — неверные, так как говорят о попадании; (3) неверно, так как ребят было более двух. Верны (4) и (6) — оба выполнены, когда никто ни в кого не попал.

14. Пятеро ребят считают апельсины на апельсиновом дереве. «Я их насчитала больше 35» — говорит Настя. «Меньше 100, уж точно» — говорит Лена. «Где вы столько увидели, я не знаю, но их минимум 9» — говорит Олег. «Нет, только на нижних ветках 10 штук, а еще наверху есть» — говорит Денис. «Не вижу сколько, но больше 5» — говорит Миша. Трое сказали правду, а двое ошиблись. Сколько апельсинов на дереве?

Ответ: 9 или 10.

Решение. Ребята утверждают про количество апельсинов следующее: (1) «36 или больше», (2) «от 0 до 99», (3) «9 или больше», (4) «11 или больше», (5) «6 или больше».

Заметим, что несколько утверждений следуют друг из друга: (1) → (4) → (3) → (5). Хотя бы одно из них неверно, значит, верно (2). Значит, из цепочки (1) → (4) → (3) → (5) только два верных — это (3) и (5), а неверные (1) и (4).

Значит, «9 или больше» верно, а «11 или больше» уже не верно. Это выполнено, если апельсинов 9 или 10.

15. Про натуральное число N известно три факта:
— если оно не делится на 8, то лежит между 70 и 79;
— если оно делится на 6, то лежит между 80 и 89;
— если оно не делится на 3, то лежит между 90 и 99.
Чему может быть равно число N ?

Ответ: 75

Решение. Промежутки во вторых частях утверждений не пересекаются. Значит, не может в первых частях утверждений не более одного верного. Рассмотрим утверждения «не делится на 8», «делится на 6» и «не делится на 3».

Все три не могут быть ложными, иначе число кратно 3 и 8 (то есть делится на 24), но не кратно 6 — это невозможно.

Если верно только первое, то из чисел от 71 до 78 подходит только 75 (делятся на 3 только 72, 75 и 78, но 72 и 78 кратны 6).

Если верно только второе, то из чисел от 81 до 88 надо число, кратное 6 и 8 — такого нет.

Если верно только третье, то из чисел от 91 до 98, кратное 8, — это 96, но оно кратно трём.

Вывод: подходит только число 75.