Блок 2. Признаки делимости

Задания Интернет-карусели (2020-2021)

1. Какой цифрой можно заменить звёздочку в записи 123∗4, чтобы полученное число было кратно 3?
2. Вася получает 27-значное число, выписав числа 167, 174, 181, 191, 198, 205, 215, 222, 229 в некотором порядке. Затем находит остаток, который даёт число при делении на 8. Какой остаток может получить Вася?
3. Вася получает 16-значное число, выписав числа 57, 59, 65, 67, 73, 75, 81, 83 в некотором порядке. Затем находит остаток, который даёт число при делении на 8. Какой остаток может получить Вася?
4. Какой цифрой можно заменить звёздочку в записи 123∗4, чтобы полученное число было кратно 11?
5. Вася заменил в записи 1∗2∗3∗4∗5 звёздочки цифрами так, что получилось число, кратное 11. Какое наибольшее число могло получиться у Васи?
6. Петя в некотором порядке выписал числа 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463. Полученное 24-значное число N делится на 91. Найдите максимальное возможное значение N.
7. Какой цифрой можно заменить звёздочку в записи 123∗4, чтобы полученное число было кратно 8?
8. Найдите остаток при делении на 9 числа 123456789101112…555657 (подряд выписаны все числа от 1 до 57).
9. Найдите остаток при делении на 11 числа 123456789101112…555657 (подряд выписаны все числа от 1 до 57).
10. Сколько натуральных чисел, кратных трём, в записи которых нет равных цифр, а использованы только цифры 0, 3, 6, 7, 9?
11. Сколько трёхзначных чисел, кратных трём, в записи которых нет равных цифр, а использованы только цифры 3, 5, 6, 7, 9?
12. Пятиклассник Тима заявил своему брату восьмикласснику Лёне: «Дай мне любые N различных цифр, а я из всех этих цифр составлю N-значное число, кратное 4». При каком наименьшем N это точно удастся сделать?
13. Какой цифрой можно заменить звёздочку в записи 1234∗5, чтобы полученное число при делении на 8 давало остаток 3?

14. Оля дала Васе свой номер телефона 87572342342 и сказала, что он делится на 8. Но это не так, так как Оля одну цифру изменила на 1. Какой верный номер Оли?
15. Пятиклассник Тима решал задачу из домашнего задания: «Какую цифру можно поставить вместо звездочки в числе 123∗456, чтобы оно стало делиться на 9?» Его брат, восьмиклассник Лёня, приписал в конце числа, данного в условии, одну цифру. В итоге в качестве ответа к задаче стали подходить 2 цифры. Какую цифру приписал Лёня?
16. Сколькими способами можно заменить звездочки в записи 1∗∗2, чтобы получившееся число было кратно 12?

Блок 2. Признаки делимости

Задания Интернет-карусели (2020-2021), указания и решения

При решении заданий карусели используются следующие факты, разобранные в материале подготовительного занятия.

- *Принцип равноостаточности* при делении на 9 (или на 3): «Любое натуральное число и сумма его цифр дают равные остатки при делении на 9 (или на 3)».
- *Принцип равноостаточности* при делении на 8: «Любое натуральное число при делении на 8 даёт тот же остаток, что и число, получаемое из данного отбрасыванием всех цифр, кроме последних трёх».

Остальные факты сформулированы в решениях. В задаче № 6 доказан *принцип равноостаточности* на 1001, которые похож на *принцип равноостаточности* на 11.

1. Какой цифрой можно заменить звёздочку в записи 123∗4, чтобы полученное число было кратно 3?

   Ответ: 2, 5 или 8.

   Решение. Число было кратно трём, если кратна трём сумма его цифр. Если к сумме 1 + 2 + 3 + 4 = 10 прибавить цифру, то получится число от 10 до 19. Из них кратны трём 12, 15 и 18. Значит, звёздочку можно заменять цифрами 2, 5 или 8.

2. Вася получает 27-значное число, выписав числа 167, 174, 181, 191, 198, 205, 215, 222, 229 в некотором порядке. Затем находит остаток, который даёт число при делении на 8. Какой остаток может получить Вася?

   Ответ: 5, 6, 7.

   Решение. Согласно *принципу равноостаточности* при делении на 8, 27-значное число Васи даёт тот же остаток, что и одно из данных трёхзначных чисел. Данные в условии числа при делении на 8 дают остатки 5, 6, 7.

3. Вася получает 16-значное число, выписав числа 57, 59, 65, 67, 73, 75, 81, 83 в некотором порядке. Затем находит остаток, который даёт число при делении на 8. Какой остаток может получить Вася?

   Ответ: 5, 7.

   Решение. Согласно *принципу равноостаточности* при делении на 8, 16-значное число Васи даёт тот же остаток, что и следующее трёхзначное число: первая цифра — нечётная, две другие образуют одно из данных в условии чисел.

   Данные в условии числа при делении на 8 дают остатки 1 или 3. Любое число вида $\overline{a00}$, где a — нечётная цифра, при делении на 8 даёт остаток 4. Значит, искомый остаток равен 4 + 1 = 5 или 4 + 3 = 7.

4. Какой цифрой можно заменить звёздочку в записи 123∗4, чтобы полученное число было кратно 11?

   Ответ: 6.

   Решение. Согласно *признаку делимости* на 11, число $\overline{123a4}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда $1-2+3-a+4=6-a$ кратно 11. Не трудно заметить, что это возможно только при $a=6$.

5. Вася заменил в записи 1∗2∗3∗4∗5 звёздочки цифрами так, что получилось число, кратное 11. Какое наибольшее число могло получиться у Васи?

   Ответ: 192938405.

   Решение. Согласно *признаку делимости* на 11, число $\overline{1a2b3c4d5}$ кратно 11 тогда и только тогда, когда $(a+b+c+d)-(1+2+3+4+5)=\ (a+b+c+d)-15$ кратно 11.

   Число 192938405 кратно 11, так как (9 + 9 + 8 + 0) – (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 26 – 15 = = 11. Покажем, что большее число не кратно 11.

   Число, большее указанного, имеет вид $\overline{1929384a5}$ или $\overline{1929394b5}$, где цифра a более 0, b — любая цифра. В этих случаях должны быть кратны 11 следующие выражения:
   $(9 + 9 + 8 + a) – (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = a + 11$;
   $(9 + 9 + 9 + b) – (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = b + 12$.
   Нетрудно понять, что это невозможно.

6. Петя в некотором порядке выписал числа 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463. Полученное 24-значное число N делится на 91. Найдите максимальное возможное значение N.

   Ответ: 463462461460458459456457.

   Указание. Используйте признак делимости на 91 · 11 = 1001.

   Решение. Имеет место следующий *принцип равноостаточности* при делении на 1001 (он похож на принцип при делении на 11): «Разобьем запись числа на группы по 3 цифры, начиная с разряда единиц. Построим знакопеременную сумму полученных частей, в которой последняя часть, с цифрой из разряда единиц данного числа, берется со знаком плюс. Данное число и такая сумма дают равные остатки при делении на 1001». Доказательство данного факта — в комментарии.

Заметим, если числа дают равные остатки при делении на 1001, то они дают равные остатки при делении на 91.

Пусть a, b, …, h — данные в условии трёхзначные числа в каком-то порядке. Число, запись которого $\overline{abcdefgh}$, при делении на 91 даёт тот же остаток, что и $-a+b-c+d-e+f-g+h$. Данные числа при делении на 91 дают остатки 1, 2, …, 8. Значение модуля данной знакопеременной суммы меньше 91, поэтому, для деления на 91 должно быть выполнено $-a+b-c+d-e+f-g+h=0$.

Вывод: надо получить наибольшее число $\overline{abcdefgh}$ из цифр от 1 до 8, для которого $a+c+e+g=b+d+f+h$.

Если искомое число имеет вид $\overline{87654fgh}$, то $8+6+4+g=7+5+f+h$ или $6+g=f+h$, где надо заменить переменные числами 1, 2, 3. Это невозможно, так как при любой замене $6+g>f+h$.

Если искомое число имеет вид $\overline{87653fgh}$, то $8+6+3+g=7+5+f+h$ или $5+g=f+h$, где надо заменить переменные числами 1, 2, 4. Это возможно только как 5 + 1 = 2 + 4. Получаем наибольшее значение $\overline{abcdefgh}$, равное 987653412. Это соответствует числу 463462461460458459456457.

Комментарий. Поймите самостоятельно, что для доказательства *принципа равноостаточности* при делении на 1001 достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма. Число $\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0\underbrace{00\ldots00}_{6k\text{ штук}}}$ и выражение $\overline{a_2a_1a_0}-\overline{a_5a_4a_3}$ дают одинаковые остатки при делении на 1001.

Доказательство леммы. Достаточно показать, что разность данного числа и указанного выражения кратна 1001. Пусть $x=\overline{a_2a_1a_0}$, $y=\overline{a_5a_4a_3}$. Преобразуем:

$$\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0\underbrace{00\ldots00}_{6k\text{ штук}}}-\left(\overline{a_2a_1a_0}-\overline{a_5a_4a_3}\right)=10^{6k+3}y+10^{6k}x-x+y=$$

$$=(10^{6k+3}+1)y+(10^{6k}-1)x=\left(10^{3(2k+1)}+1\right)y+(10^{3k}-1)(10^{3k}+1)x.$$

Сумма одинаковых нечётных степеней натуральных чисел кратна сумме этих чисел, так как имеет место тождество

$$m^{2p+1}+n^{2p+1}=(m+n)(m^{2p}-m^{2p-1}n+\cdots-mn^{2p-1}+n^{2p}).$$

Значит, $10^{3(2k+1)}+1$ кратно 10^3+1 и $10^{3k}+1$ кратно 10^3+1. Делимость на 1001 доказана, то есть доказана и лемма.

7. Какой цифрой можно заменить звёздочку в записи 123*4, чтобы полученное число было кратно 8?

Ответ: 0, 4 или 8.

Решение. Согласно *признаку делимости* на 8, число $\overline{123a4}$ делится на 8 тогда и только тогда, когда число $\overline{3a4}=304+\overline{a0}$ кратно 8. Число 304 кратно 8, поэтому $\overline{a0}$ кратно 8. Это выполнено, если a — цифра 0, 4 или 8.

8. Найдите остаток при делении на 9 числа 123456789101112…555657 (подряд выписаны все числа от 1 до 57).

Ответ: 6.

Решение. Сумма цифр данного числа равна 393. Согласно *принципу равноостаточности* при делении на 9, искомый остаток — остаток числа 393 при делении на 9. Он равен 6.

Комментарий. Можно обойти трудоёмкий момент — поиск суммы цифр такого большого числа. Рассмотрим сумму 1 + 2 + 3 + … + 56 + 57. Она даёт при делении на 9 тот же остаток, что 1 + 2 + 3 + … + (5 + 6) + (5 + 7), то есть как и сумма цифр данного числа. Такую сумму нетрудно найти, она равна (1 + 57) · 57 : 2 = 29 · 57. Числа 29 и 57 дают остатки 2 и 3, их произведение — остаток 2 · 3 = 6.

9. Найдите остаток при делении на 11 числа 123456789101112…555657 (подряд выписаны все числа от 1 до 57).

Ответ: 7.

Указание. Знакопеременная сумма цифр равна 73, это число при делении на 11 даёт остаток 7.

Решение. Можно найти знакопеременная сумма цифр данного числа, она равна 73. Это число при делении на 11 даёт остаток 7. Можно избежать трудоёмкий подсчёт знакопеременной суммы.

Имеет место *принцип равноостаточности* при делении на 11: «Любое натуральное число и сумма чисел, образующих группы по две цифры (начиная с единиц), дают равные остатки при делении на 11». Исходя из него, достаточно найти остаток, который при делении на 11 даёт сумма

1 + 23 + 45 + 67 + 89 + 10 + 11 + … + 56 + 57.

Она равна (1 + 23 + 45 + 67 + 89) + (10 + 57) · 48 : 2 = 225 + 67 · 24 = 1833. Получаем: 1833 : 11 = 166 (ост. 7).

10. Сколько натуральных чисел, кратных трём, в записи которых нет равных цифр, а использованы только цифры 0, 3, 6, 7, 9?

Ответ: 48.

Решение. Сумма цифр числа должны быть кратной трём. Все цифры, кроме «7», кратны трём. Поэтому, цифра «7» не может быть использована.

Любое число, составленное из цифр 0, 3, 6 и 9, будет кратно трём. Однозначных чисел — 3. Для двузначного числа первую цифру можно выбрать 3 способами (любая, кроме нуля), вторую — также 3 способами (любая из 3 оставшихся), итого $3 \cdot 3 = 9$ двузначных чисел. Аналогично считая, получаем: трёхзначных — $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ штук, четырёхзначных — $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ штук.

Итого $3 + 9 + 18 + 18 = 48$ чисел.

11. Сколько трёхзначных чисел, кратных трём, в записи которых нет равных цифр, а использованы только цифры 3, 5, 6, 7, 9?

Ответ: 24.

Решение. Сумма цифр числа должны быть кратной трём. Цифры «5» и «7» не кратны 3, а остальные — кратны. Поэтому, либо они не использованы, либо использованы вместе (так как $5 + 7$ делится на 3). Поэтому, возможны только следующие наборы цифр: 357, 657, 957, 369. В каждом случае перестановкой местами можно получить 6 вариантов. Итого $4 \cdot 6 = 24$.

12. Пятиклассник Тима заявил своему брату восьмикласснику Лёне: «Дай мне любые N различных цифр, а я из всех этих цифр составлю N-значное число, кратное 4». При каком наименьшем N это точно удастся сделать?

Ответ: 7.

Решение. Из шести цифр 1, 3, 5, 7, 9, 4 (или части из них) нельзя составить число, кратное 4. Если такое возможно, то последняя цифра — 4 (так как она единственная чётная). Тогда согласно признаку делимости на 4, на 4 должно делиться хотя бы одно из чисел 14, 34, 54, 74 или 94. Но среди них нет кратных четырём.

Достаточно доказать, что среди любых 7 различных цифр найдутся две, из которых можно составить число, кратное 4. Тогда это число можно будет поставить в конец числа, а остальные цифры расставить в произвольном порядке перед ними. Полученное число будет делиться на 4 в силу признака делимости на 4.

Среди 7 различных цифр можно найти две чётные. Если одна из них кратна 4, то её можно поставить в разряд единиц, другую чётную — в разряд десятков, любое такое число кратно 4. Если нет цифры, кратной 4, то среди 7 цифр чётные — это 2 и 6, остальные — все нечётные (в том числе 1). Тогда составить число, оканчивающееся на 16, оно будет кратно 4.

13. Какой цифрой можно заменить звёздочку в записи 1234∗5, чтобы полученное число при делении на 8 давало остаток 3?

Ответ: 3 или 7.

Решение. Согласно *принципу равноостаточности* при делении на 8, число 4∗5 при делении на 8 должно давать остаток 3. Такой же остаток даёт число 403, поэтому разность $4{*}5 - 403 = {*}2$ кратна 8. Перебором нетрудно проверить, что звёздочку можно заменить только цифрами 3 и 7.

14. Оля дала Васе свой номер телефона 87572342342 и сказала, что он делится на 8. Но это не так, так как Оля одну цифру изменила на 1. Какой верный номер Оли?

Ответ: 87572342352.

Решение. Согласно *признаку делимости* на 8, число 342 должно быть кратно 8. Но оно не делится, поэтому неверная цифра — одна из трёх последних. Значит, последние цифры номера — 442, 242, 332, 352, 341 или 343. Из них только 352 делится на 8. Значит, верный номер — 87572342352.

15. Пятиклассник Тима решал задачу из домашнего задания: «Какую цифру можно поставить вместо звездочки в числе 123∗456, чтобы оно стало делиться на 9?» Его брат, восьмиклассник Лёня, приписал в конце числа, данного в условии, одну цифру. В итоге в качестве ответа к задаче стали подходить 2 цифры. Какую цифру приписал Лёня?

Ответ: 6.

Решение. После замены звездочки сумма цифр должна стать кратной 9. Значит, если есть 2 варианта замены, то эти цифры дают одинаковый остаток при делении на 9. Такие цифры — только 0 и 9. Значит, Лёня приписал такую цифру a, что сумма $1 + 2 + 3 + 0 + 4 + 5 + 6 + a = 21 + a$ кратна 9. Единственный вариант — $a = 6$.

16. Сколькими способами можно заменить звездочки в записи 1∗∗2, чтобы получившееся число было кратно 12?

Ответ: 17.

Решение 1. Число было кратно 12, если оно делится на 3 и 4.

По признаку делимости на 4, если искомое число кратно 4, то оно имеет вид 1∗12, 1∗32, 1∗52, 1∗72 или 1∗92. Сумма цифр числа будет кратна трём, если в первом случае вставить цифры 2, 5, 8, во втором — 0, 3, 6 9, в третьем — 1, 4, 7, в четвертом — 2, 5, 8, в пятом — 0, 3, 6, 9. Итого $3 + 4 + 3 + 3 + 4 = 17$.

Решение 2. Самое маленькое число такого вида — 1032, самое большое — 1992. Чтобы число 1032 + а было такого же вида, значение а должно быть кратно 12 (чтобы сохранилась делимость на 12) и оканчиваться на 0 (чтобы сохранилась последняя цифра 2). Значит, а кратно НОК (12; 10) = 60. Вывод: все искомые числа имеют вид $1032 + 60k$. Число 1992 получаемся при $k = 16$, поэтому выполнено $0 \le k \le 16$, то есть таких чисел 17.