

Блок 6. Делимость: остатки при делении

Подготовительное занятие

- Найдите неполное частное и остаток от деления:
(а) 19 на 3; 666 на 4; (б) -3 на 5; -34 на 7.
- Пусть a при делении на 7 дает остаток 5. Какие остатки при делении на 7 дают числа
(а) $a + 5$, (б) $a + 2014$, (в) $2a$, (г) $3a + 15$, (д) $-a$, (е) $-a + 6$?
- 1. Целые числа a , b и c дают при делении на 5 остатки 1, 2, 4 соответственно. Какие остатки при делении на 5 дают числа: (а) $a + b + c$; (б) $2a - 3b + 5c$?
- 2. Число a — четное. Каким может быть остаток от деления числа a на 6?
- 3. (а) Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 дает остаток 4, при делении на 7 дает остаток 6, а при делении на 11 — остаток 10.
(б) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 3, при делении на 25 дает остаток 22, при делении на 10 — остаток 7.
- 4. Дети делили апельсины. Оказалось, что ни на 5, ни на 3, ни на 4 человека апельсины не делятся поровну. Но когда попугай Кеша съел один из апельсинов, оставшееся количество уже можно было поделить и на 5, и на 3 человека, а на 4 все еще нет. Сколько же было апельсинов, если известно, что их было меньше 40?
- 5. (а) Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в неполном частном получится то же число, что и в остатке.
(б) На какие натуральные числа можно разделить число 1001 так, что неполное частное будет равно остатку?
- 6. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m .
- 7. Маша поссорилась с Петей, поэтому решила порвать его фотографию. Сначала она разорвала ее на 8 кусков. Потом взяла один из кусочков и разорвала его еще на 8 кусков, затем снова взяла один из кусочков и разорвала на 8, и так далее. Успокоившись, Машенька пересчитала кусочки.
(а) Могло ли их оказаться ровно 2019 кусочков?
(б) Какое наименьшее число кусочков могло получиться, если известно, что их количество выражается четырехзначным числом?
- 8. В верхнем углу таблицы 5×5 стоит число 1. Остальные клетки пусты. В них вписывают числа по следующему правилу: если в какой-то клетке стоит число a , то в соседнюю пустую клетку можно записать либо число $4a$, либо число $(a - 12)$, либо число $(a + 3)$. Так заполнили числами все клетки. Может ли оказаться сумма чисел стала равной нулю?

Блок 6. Делимость: остатки при делении

Подготовительное занятие

- Найдите неполное частное и остаток от деления:
(а) 19 на 3; 666 на 4; (б) -3 на 5; -34 на 7.
- Пусть a при делении на 7 дает остаток 5. Какие остатки при делении на 7 дают числа
(а) $a + 5$, (б) $a + 2014$, (в) $2a$, (г) $3a + 15$, (д) $-a$, (е) $-a + 6$?
- 1. Целые числа a , b и c дают при делении на 5 остатки 1, 2, 4 соответственно. Какие остатки при делении на 5 дают числа: (а) $a + b + c$; (б) $2a - 3b + 5c$?
- 2. Число a — четное. Каким может быть остаток от деления числа a на 6?
- 3. (а) Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 дает остаток 4, при делении на 7 дает остаток 6, а при делении на 11 — остаток 10.
(б) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 3, при делении на 25 дает остаток 22, при делении на 10 — остаток 7.
- 4. Дети делили апельсины. Оказалось, что ни на 5, ни на 3, ни на 4 человека апельсины не делятся поровну. Но когда попугай Кеша съел один из апельсинов, оставшееся количество уже можно было поделить и на 5, и на 3 человека, а на 4 все еще нет. Сколько же было апельсинов, если известно, что их было меньше 40?
- 5. (а) Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в неполном частном получится то же число, что и в остатке.
(б) На какие натуральные числа можно разделить число 1001 так, что неполное частное будет равно остатку?
- 6. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m .
- 7. Маша поссорилась с Петей, поэтому решила порвать его фотографию. Сначала она разорвала ее на 8 кусков. Потом взяла один из кусочков и разорвала его еще на 8 кусков, затем снова взяла один из кусочков и разорвала на 8, и так далее. Успокоившись, Машенька пересчитала кусочки.
(а) Могло ли их оказаться ровно 2019 кусочков?
(б) Какое наименьшее число кусочков могло получиться, если известно, что их количество выражается четырехзначным числом?
- 8. В верхнем углу таблицы 5×5 стоит число 1. Остальные клетки пусты. В них вписывают числа по следующему правилу: если в какой-то клетке стоит число a , то в соседнюю пустую клетку можно записать либо число $4a$, либо число $(a - 12)$, либо число $(a + 3)$. Так заполнили числами все клетки. Может ли оказаться сумма чисел стала равной нулю?

Блок 6. Делимость: остатки при делении

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Занятие посвящено задачам об остатках чисел при делении. Полезно вспомнить определение и рассмотреть, например, как находятся остатки отрицательных чисел.

✓ Дано натуральное число d . Любое целое число a единственным способом представимо в виде $a = kd + r$, где k и r — целые числа, $0 \leq r < d$. Число r называют *остатком* от деления a на d , число k — *неполным частным*.

Заметим, что в качестве делителя рассматриваются только натуральные числа. При делении на отрицательные целые числа говорить об остатках нельзя.

Задания, которые рекомендуем разобрать вместе с определением.

- Найдите неполное частное и остаток от деления:

(а) 19 на 3; 666 на 4;

(б) -3 на 5; -34 на 7.

Ответ: (а) 6 и 1, 166 и 2, (б) -1 и 2, -5 и 1.

Решение. Ответы следуют из следующих равенств:

$$(а) 19 = 6 \cdot 3 + 1, 666 = 166 \cdot 4 + 2;$$

$$(б) -3 = -1 \cdot 5 + 2, -34 = -5 \cdot 7 + 1.$$

Комментарий. При обсуждении решения пункта (б) полезно заметить, что остаток при делении на d не меняется при прибавлении (вычитании) числа d . Например, -3 при делении на 5 даёт тот же остаток, что и $-3 + 5 = 2$.

- Пусть a при делении на 7 даёт остаток 5. Какие остатки при делении на 7 дают числа (а) $a + 5$, (б) $a + 2014$, (в) $2a$, (г) $3a + 15$, (д) $-a$, (е) $-a + 6$?

Указание. Можно рассуждать по смыслу остатка. Например, в (а) если число a — несколько раз 7 и еще 5, то $a + 5$ — несколько раз 7 и еще $10 = 7 + 3$, то есть несколько раз 7 и еще 3. Далее приведены решения с использованием формул.

Ответ: (а) 3, (б) 3, (в) 3, (г) 2, (д) 2, (е) 1.

Решение. По определению $a = 7k + 5$. Тогда получаем:

$$(а) \text{ число } a + 5 = (7k + 5) + 5 = 7k + 10 = 7(k + 1) + 3 \text{ даёт остаток } 3,$$

$$(б) \text{ число } a + 2014 = 7k + 2019 = 7k + 288 \cdot 7 + 3 = 7(k + 288) + 3 \text{ даёт остаток } 3,$$

$$(в) \text{ число } 2a = 2(7k + 5) = 14k + 10 = (2k + 1) \cdot 7 + 3 \text{ даёт остаток } 3,$$

$$(г) \text{ число } 3a + 15 = 3(7k + 5) + 15 = 21k + 30 = 7(3k + 4) + 2 \text{ даёт остаток } 1,$$

$$(д) \text{ число } -a = -7k - 5 = 7(-k - 1) + 2 \text{ даёт остаток } 2,$$

$$(е) \text{ число } -a + 6 = -7k - 5 + 6 = -7k + 1 \text{ даёт остаток } 1.$$

- Целые числа a , b и c дают при делении на 5 остатки 1, 2, 4 соответственно. Какие остатки при делении на 5 дают числа: (а) $a + b + c$; (б) $2a - 3b + 5c$?

Ответ: (а) 2, (б) 1.

Решение. По определению $a = 5x + 1$, $b = 5y + 2$, $c = 5z + 4$. Тогда

$$(а) \text{ число } a + b + c = (5x + 1) + (5y + 2) + (5z + 4) = 5(x + y + z + 1) + 2 \text{ даёт остаток } 2.$$

$$(б) \text{ число } 2a - 3b + 5c = 2(5x + 1) - 3(5y + 2) + 5(5z + 4) = 5(2x - 3y + 3z) + 16 = 5(2x - 3y + 3z + 3) + 1 \text{ даёт остаток } 1.$$

- Число a — четное. Каким может быть остаток от деления числа a на 6?

Ответ: 0, 2, 4.

Решение. По определению $a = 6k + r$. Так как число a чётное и слагаемое $6k$ также чётное, то чётным должно быть и число r . Значит, остаток может быть только 0, 2 или 4. Все три варианта возможны. Например, такие остатки дают чётные числа 0, 2 и 4.

- (а) Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 даёт остаток 4, при делении на 7 даёт остаток 6, а при делении на 11 — остаток 10.

(б) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 3, при делении на 25 даёт остаток 22, при делении на 10 — остаток 7.

Ответ: (а) 384, (б) 147.

Решение. (а) Если искоемое число увеличить на 1, то оно будет делиться на 5, 7, 11. Эти числа взаимно просты, значит, это число должно делиться на $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. Значит, наименьшее подходящее число равно $385 - 1 = 384$.

(б) Если искоемое число увеличить на 3, то оно будет делиться на 25, 10 и 3. Тогда оно должно делиться на их НОК $(25; 10; 3) = 150$. Значит, наименьшее число, подходящее по условию равно $150 - 3 = 147$.

- Дети делили апельсины. Оказалось, что ни на 5, ни на 3, ни на 4 человека апельсины не делятся поровну. Но когда попугай Кеша съел один из апельсинов, оставшееся количество уже можно было поделить и на 5, и на 3 человека, а на 4 все еще нет. Сколько же было апельсинов, если известно, что их было меньше 40?

Ответ: 31.

Решение. После Кеша количество апельсинов стало делиться на 3 и 5, а значит и на 15. Рассмотрим случаи.

(1) Если после Кеши было 15 апельсинов, то в начале их было 16. Это число кратно 4, это противоречит условию.

(2) Если после Кеши было 30 апельсинов, то в начале их было 31 — это удовлетворяет условию.

(3) Остальные числа, делящиеся на 15, уже больше 40, то есть не подходят по условию.

5. (а) Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в неполном частном получится то же число, что и в остатке.

(б) На какие натуральные числа можно разделить число 1001 так, что неполное частное будет равно остатку?

(а) Ответ: 8, 16, 24, 32, 40, 48.

Решение. Искомые числа имеют вид $7a + a = 8a$, где a — целое число от 0 до 6. Если $a = 0$, то получаем число, не являющееся натуральным. В остальных вариантах получаем 8, 16, 24, 32, 40, 48.

(б) Ответ: 1000, 142, 90, 76.

Решение. Если делитель равен d , а неполное частное и остаток равны r , то из условия $1001 = dr + r = r(d + 1)$. При этом d — натуральное число, а целое число r от 0 до $d - 1$, то есть первый множитель меньше второго.

Число 1001 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только 4 способами: $1 \cdot 1001$, $7 \cdot 143$, $11 \cdot 91$, $13 \cdot 77$. Этим случаям соответствует значения d , равные 1000, 142, 90, 76.

6. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m .

Ответ: 60.

Решение (рассуждения). Число 13 на 2 меньше 15. Значит, при одном и том же частном n остаток от деления на 13 на $2n$ больше, чем остаток от деления на 15, то есть $2n = 8$. Отсюда делимое равно $15 \cdot 4 = 13 \cdot 4 + 8 = 60$.

Решение (формулы). Из условия $m = 13n + 8 = 15n$, отсюда $n = 4$, $m = 60$.

7. Маша поссорилась с Петей, поэтому решила порвать его фотографию. Сначала она разорвала ее на 8 кусков. Потом взяла один из кусочков и разорвала его еще на 8 кусков, затем снова взяла один из кусочков и разорвала на 8, и так далее. Успокоившись, Машенька пересчитала кусочки.

(а) Могло ли их оказаться ровно 2019 кусочков?

(б) Какое наименьшее число кусочков могло получиться, если известно, что их количество выражается четырёхзначным числом?

Ответ: (а) нет, (б) 1002.

Решение. Каждый раз Маша из одного кусочка делает 8, то есть количество кусков увеличивается на $8 - 1 = 7$. Значит, число кусочков, которые у неё получаются, — все подряд числа, дающие при делении на 7 остаток 1.

(а) Число 2019 при делении 7 даёт остаток 3. Значит, такое число кусочков не могло получиться.

(б) Минимальное четырёхзначное число, дающее при делении на 7 остаток 1, — 1002.

8. В верхнем углу таблицы 5×5 стоит число 1. Остальные клетки пусты. В них вписывают числа по следующему правилу: если в какой-то клетке стоит число a , то в соседнюю пустую клетку можно записать либо число $4a$, либо число $(a - 12)$, либо число $(a + 3)$. Так заполнили числами все клетки. Может ли оказаться сумма чисел стала равной нулю?

Ответ: нет, так не могло случиться.

Решение. Заметим, что первое число 1 даёт при делении на 3 остаток 1. Если число a даёт остаток 1, то и числа $4a$, $a - 12$, $a + 3$ дают тот же остаток. Действительно, если $a = 3k + 1$, то $4a = 4(3k + 1) = 3(4k + 1) + 1$, а в остальных случаях прибавляется или вычитается число, кратное 3.

Вывод: все числа в таблице будут давать при делении на 3 остаток 1.

Сумма 25 чисел, дающих при делении на 3 остаток 1, даёт тот же остаток, что и число 25, то есть 1. Она не может быть равной 0, так как число 0 не даёт остаток 1.