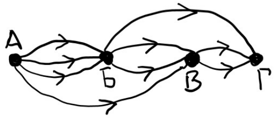
Блок 2. Комбинаторика

Задания Интернет-карусели (2020-2021)

1. У малыша Тимоши есть 2 красных кубика и 2 синих кубика одинаковых размеров. Сколькими способами он может составить башню из всех 4 кубиков? Башни считаются одинаковыми, если они «окрашены» одинаково.

2. Лёня нарисовал для своего брата Тимоши задание. Нужно по стрелкам добраться из точки А в точку Г. Сколькими способами Тимоша может выполнить такое задание?



3. Сколько двузначных чисел, в записи которых цифры разной чётности, отличающиеся более чем на 1?

4. Сколькими способами Буратино может заплатить за азбуку стоимостью 100 сольдо, если у него в кармане только монеты по 3 сольдо и 7 сольдо?

5. Олег считает пятизначное число *хорошим*, если в нём можно убрать одну цифру и получить 2020. Сколько *хороших* пятизначных чисел?

6. В клетках можно «прочитать» слово МОЛОКО, начиная с некоторой клетки и переходя от буквы к следующей, расположенной в соседней (по стороне) клетке. Сколькими способами это можно сделать, если написанную букву *нельзя* использовать в слове несколько раз?

				М
			М	О
		М	О	Л
	М	О	К	О
М	О	Л	О	К

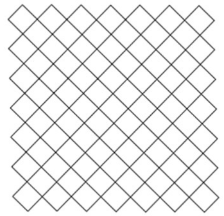
7. В клетках можно «прочитать» слово МОЛОКО, начиная с некоторой клетки и переходя от буквы к следующей, расположенной в соседней (по стороне) клетке. Сколькими способами это можно сделать, если написанную букву *можно* использовать в слове несколько раз?

8. Аня, Боря и Вова стоят в очереди в буфет. Сколькими способами можно составить такую очередь?

9. Бизнесмен Василий решил делать оригинальное домино. В нём на половинках костей стоят числа от 0 до 57, но номера на каждой кости отличаются не более чем на 3. Все кости в наборе различны. Сколько должно быть костей в наборе бизнесмена Василия?

10. Лёня вырезает из клетчатой бумаги квадраты 2×2, закрашивает (с одной стороны) несколько (одну или больше) клеток в чёрный цвет, остальные клетки остаются белыми. Лёня считает раскраски одинаковыми, если может их повернуть так, что они совпадут. Сколько существует различных раскрасок?

11. Сколькими способами в клетчатом «квадрате», изображенном на рисунке, можно отметить 2 клетки, имеющие общую сторону?



12. Сколькими способами в клетчатом «квадрате», изображенном на рисунке, можно отметить 3 клетки, образующие уголок?

13. Даны три разные цифры А, Б, В. Миша составил всевозможные трёхзначные числа, в записи которых используются только эти цифры (возможно, не все). Сумма этих чисел равна 23976. Каково наименьшее из чисел, составленных Мишей?

14. Миша составил всевозможные трёхзначные числа, переставляя разными способами три разные цифр 0, 1 и 2. Чему равна сумма этих чисел?

15. Клетки доски 9 × 9 окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Сколькими способами на этой доске можно выбрать 2 клетки разного цвета, стоящие в одной строке или одном столбце.

16. Коля выписал по кругу все цифры и соединил отрезком те цифры, из которых можно составить чётное число. Сколько отрезков провёл Коля?

Блок 2. Комбинаторика

Интернет-карусели (2020-2021). Ответы, решения, указания

1. У малыша Тимоши есть 2 красных кубика и 2 синих кубика одинаковых размеров. Сколькими способами он может составить башню из всех 4 кубиков? Башни считаются одинаковыми, если они «окрашены» одинаково.

   Ответ: 6.

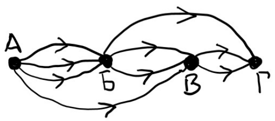
   Решение. Не трудно перебрать все такие башни: ККСС, КСКС, КССК, СККС, СКСК, ССКК. Они изображены на рисунке.

С	С	К	С	К	К
С	К	С	К	С	К
К	С	С	К	К	С
К	К	К	С	С	С

   Комментарий. Важно научиться перебирать такие варианты. Здесь сначала перебраны все башни, где нижний красный кубик — первый (снизу), затем — где второй, потом — где третий.

   Можно обсудить с учениками, как организовать перебор башен из 6 кубиков, в которых 3 красных кубика и 3 синих кубика. Всего их 20 штук.

2. Лёня нарисовал для своего брата Тимоши задание. Нужно по стрелкам добраться из точки А в точку Г. Сколькими способами Тимоша может выполнить такое задание?



   Ответ: 17.

   Решение. Путей А → Б → В → Г — $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ штук, путей А → Б → Г — $3 \cdot 1 = 3$ штуки, путей А → В → Г — $1 \cdot 2 = 2$ штуки. Всего $12 + 3 + 2 = 17$ способов.

3. Сколько двузначных чисел, в записи которых цифры разной чётности, отличающиеся более чем на 1?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2019-2020 учебный год

   Ответ: 28.

   Решение. Все двузначные числа удобно изобразить как ячейки таблицы, как показано на рисунке: каждая строка соответствует десятку. Крестиками отмечены числа, удовлетворяющие условию. Их 28 штук.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1					X		X		X	
2						X		X		X
3	X						X		X	
4		X						X		X
5	X		X						X	
6		X		X						X
7	X		X		X					
8		X		X		X				
9	X		X		X		X			

   Замечание. Не сложно перебрать все такие числа. При этом, во всех десятках, кроме последнего, по 3 искомых числа. Популярным оказался неверный ответ «27»

4. Сколькими способами Буратино может заплатить за азбуку стоимостью 100 сольдо, если у него в кармане только монеты по 3 сольдо и 7 сольдо?

   Ответ: 5.

   Решение. Наибольшее количество монет в 3 сольдо Буратино может заплатить так: $100 = 31 \cdot 3 + 7 \cdot 1$. Следующий способ получается, если заменить 7 монет по 3 сольдо на 3 монеты по 7 сольдо: $100 = 24 \cdot 3 + 7 \cdot 4$. Продолжая такие замены, получаем еще 3 способа: $100 = 17 \cdot 3 + 7 \cdot 7 = 10 \cdot 3 + 7 \cdot 10 = 3 \cdot 3 + 7 \cdot 13$.

   Комментарий. Предложите ученикам решить ту же задачу, заменив 100 сольдо на 1000 сольдо. Ответ: 48 способов. Действительно, $1000 = 331 \cdot 3 + 7 \cdot 1$. Так как $331 : 7 = 47$ (ост. 2), то замены можно проводить 47 раз. Значит, кроме указанного способа есть еще 47 других. Итого $1 + 47 = 48$ вариантов.

5. Олег считает пятизначное число *хорошим*, если в нём можно убрать одну цифру и получить 2020. Сколько *хороших* пятизначных чисел?

   Ответ: 45.

   Решение. Если в записи $*2*0*2*0*$ одну звездочку заменить цифрой 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, а остальные звёздочки убрать, то получатся разные хорошие числа. Таких вариантов $5 \cdot 8 = 40$. Если убрали цифру «0», то число было 20020 или 20200. Если убрали цифру «2», то число было 22020, 20220 или 20202. Итого 45 чисел.

   Замечание. Многие рассуждают следующим образом.

   Есть 5 мест, куда надо поставить 1 цифру: _2_0_2_0_. На первое место можно поставить любую, кроме нуля, на каждое из остальных — любую из 10. Итого $9 + 10 + 10 + 10 + 10 = 49$ чисел.

В таком случае есть числа, которые учитываются дважды. Например, число 20020 можно получить, вставляя «0» после первой цифры «2» или вставляя после первой цифры «0»: 20020 и 20020.

Комментарий. Если в условии число 2020 заменить любым другим четырёхзначным числом, то ответ не изменится. Постарайтесь доказать это самостоятельно.

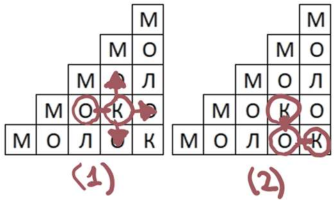
6. В клетках можно «прочитать» слово МОЛОКО, начиная с некоторой клетки и переходя от буквы к следующей, расположенной в соседней (по стороне) клетке. Сколькими способами это можно сделать, если написанную букву *нельзя* использовать в слове несколько раз?

				М
			М	О
		М	О	Л
	М	О	К	О
М	О	Л	О	К

Ответ: 40.

Решение. Будем считать варианты прочитать ОЛОКО, где первая О — соседняя с М. Количество вариантов прочитать МОЛОКО будет вдвое больше, так как всегда от первой О можно перейти 2 способами к букве М.

Будем считать ОЛОКО, начиная с конца. Есть 4 буквы О, соседние с буквами К. Рассмотрим варианты, показанные на картинке.



(1) От отмеченной О однозначно идем к К. Если далее вправо, то однозначно к Л и далее до О двумя способами; всего 2 варианта. Если далее вниз, то получаем ОЛОКО однозначно. Если далее вверх, то получаем ОЛОКО однозначно. Итого 4 варианта.

(2) Если от отмеченной О идём к К вправо, то далее 2 варианта получить ОЛОКО. Если идём вверх, то выход от К влево даёт 1 вариант, вправо — 2 варианта, вверх — 1 вариант получить ОЛОКО. Итого 6 вариантов.

Две другие буквы О, соседние с буквами К, дают также 4 + 6 = 10 вариантов. Итого ОЛОКО можно прочитать 10 + 10 = 20 способами, а МОЛОКО — 40 способами.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2019-2020 учебный год

7. В клетках можно «прочитать» слово МОЛОКО, начиная с некоторой клетки и переходя от буквы к следующей, расположенной в соседней (по стороне) клетке. Сколькими способами это можно сделать, если написанную букву *можно* использовать в слове несколько раз?

				М
			М	О
		М	О	Л
	М	О	К	О
М	О	Л	О	К

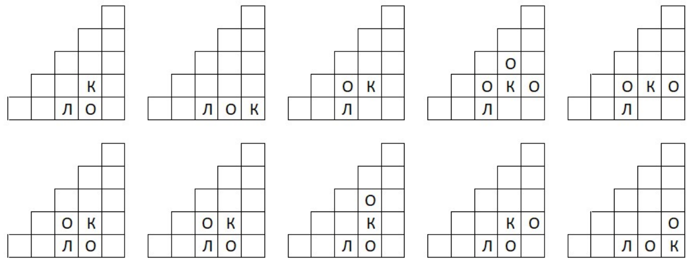
Ответ: 80.

Решение. МОЛ можно прочитать, начиная с любой буквы Л, $2 \cdot 2 = 4$ способа. Найдём число способов прочитать ЛОКО с нижней Л, вариантов прочитать слово МОЛОКО будет в 8 раз больше.

От нижней Л можно однозначно дойти до угловой К, затем 2 способами добавить О. Таких вариантов 2. Дойти до другой К можно 2 способами, затем 4 способами добавить О. Таких вариантов $2 \cdot 4 = 8$.

Итого $(2 + 8) \cdot 8 = 80$ способов.

Комментарий. Ниже приведены 10 способов прочитать ЛОКО, начиная от одной буквы Л.



8. Аня, Боря и Вова стоят в очереди в буфет. Сколькими способами можно составить такую очередь?

Ответ: 6.

Решение. Первым в очередь может встать любой из троих, вторым — любой из двух оставшихся, третий — тот, кто остается. Итого $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов.

9. Бизнесмен Василий решил делать оригинальное домино. В нём на половинках костей стоят числа от 0 до 57, но номера на каждой кости отличаются не более чем на 3. Все кости в наборе различны. Сколько должно быть костей в наборе бизнесмена Василия?

Ответ: 226.

Решение. Есть 4 кости домино с числом 57: 57:57, 57:56, 57:55, 57:54.
Из оставшихся костей с числом 56 — 4 штуки: 56:56, 56:55, 56:54, 56:53.

Из оставшихся костей с числом 55 — 4 штуки: 55:55, 55:54, 55:53, 55:52.
...
Из оставшихся костей с числом 3 — 4 штуки: 3:3, 3:2, 3:1, 3:0.
Из оставшихся костей с числом 2 — 3 штуки: 2:2, 2:1, 2:0.
Из оставшихся костей с числом 1 — 2 штуки: 1:1, 1:0.
Из оставшихся костей с числом 0 — 1 штука: 0:0.

Итого: $55 \cdot 4 + 3 + 2 + 1 = 220 + 6 = 226$.

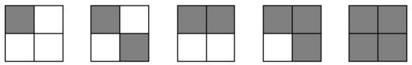
Комментарий. Все кости домино удобно изобразить ячейками таблицы, расположенными на диагонали и выше её, как показано на рисунке. В решении приведен подсчёт по столбцам, начиная с последнего.

	0	1	2	3	4	5	...	53	54	55	56	57
0	X	X	X	X								
1		X	X	X	X							
2			X	X	X	X						
3				X	X	X						
4					X	X						
5						X						
...												
53								X	X	X	X	
54									X	X	X	X
55										X	X	X
56											X	X
57												X

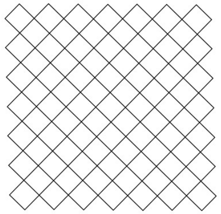
10. Лёня вырезает из клетчатой бумаги квадраты 2×2, закрашивает (с одной стороны) несколько (одну или больше) клеток в чёрный цвет, остальные клетки остаются белыми. Лёня считает раскраски одинаковыми, если может их повернуть так, что они совпадут. Сколько существует различных раскрасок?

Ответ: 5.

Решение. Есть одна раскраска с 1 чёрной клеткой, две раскраски с 2 чёрными клетками, одна раскраска с 3 чёрными клетками и одна раскраска с 4 чёрными клетками. Итого $1 + 2 + 1 + 1 = 5$.

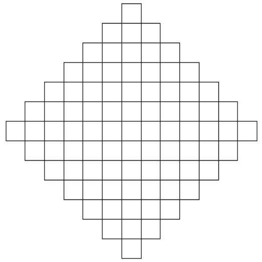


11. Сколькими способами в клетчатом «квадрате», изображенном на рисунке, можно отметить 2 клетки, имеющие общую сторону?



Ответ: 144.

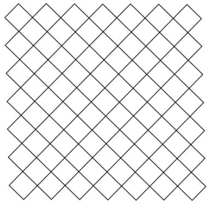
Решение. Развернем квадрат и получим поле, показанное справа. Посчитаем количество горизонтальных пар клеток по рядам:



$0 + 2 + 4 + ... + 10 + 12 + 10 + ... + 2 + 0 = 72.$

Столько же вертикальных пар. Итого $72 \cdot 2 = 144$.

12. Сколькими способами в клетчатом «квадрате», изображенном на рисунке, можно отметить 3 клетки, образующие уголок?



Ответ: 264.

Решение. Развернем квадрат и получим поле, показанное справа. Отметим в каждой клетке, для скольких уголков она может быть угловой.

						0						
					1	4	1					
				1	4	4	4	1				
			1	4	4	4	4	4	1			
		1	4	4	4	4	4	4	4	1		
	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1	
0	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	0
	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1	
		1	4	4	4	4	4	4	4	1		
			1	4	4	4	4	4	1			
				1	4	4	4	1				
					1	4	1					
						0						

Сумма чисел — искомое число. Оно равно
$2 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 4 + 11 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 264$.

13. Даны три разные цифры А, Б, В. Миша составил всевозможные трёхзначные числа, в записи которых используются только эти цифры (возможно, не все). Сумма этих чисел равна 23976. Каково наименьшее из чисел, составленных Мишей?

Ответ: 777.

Решение. Из разных ненулевых цифр А, Б, В можно составить трёхзначное число 27 способами: на каждое место можно выбрать цифру 3 способами, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Если выписать все числа, то в каждом разряде цифр поровну, по $27 : 3 = 9$ штук.

Значит, сумма цифр в каждом разряде равна $9 \cdot (А + Б + В)$. Значит, сумма чисел равна $9 \cdot (А + Б + В) \cdot 111 = 23976$, откуда $А + Б + В = 23976 : 999 = 24$.

Три самые большие цифры 7, 8, 9 дают сумму 24, значит, то А, Б, В — это цифры 7, 8 и 9. Наименьшее трёхзначное число, составленное из них, — 777.

14. Миша составил всевозможные трёхзначные числа, переставляя разными способами три разные цифр 0, 1 и 2. Чему равна сумма этих чисел?

Ответ: 633.

Решение. Это числа 102, 120, 201, 210. Их сумма равна 633.

15. Клетки доски 9×9 окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Сколькими способами на этой доске можно выбрать 2 клетки разного цвета, стоящие в одной строке или одном столбце.

Ответ: 360.

Решение. Выберем строку или столбец 18 способами. В выбранной линии клетку одного цвета можно выбрать 4 способами, клетку другого цвета — 5 способами. Итого $18 \cdot 5 \cdot 4 = 360$ способов.

16. Коля выписал по кругу все цифры и соединил отрезком те цифры, из которых можно составить чётное число. Сколько отрезков провёл Коля?

Ответ: 35.

Решение. Проведены все отрезки Ч-Ч (соединяющие две чётные цифры) и Ч-Н (соединяющие четную цифру с нечётной). Первых — $5 \cdot 4 : 2 = 10$, вторых — $5 \cdot 5 = 25$. Итого $10 + 25 = 35$.