Блок 1. Системы уравнений

Подготовительное занятие

- Четверо друзей заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 рублей, если без второго — 85 рублей, если без третьего — 80 рублей, если без четвёртого — 75 рублей. Сколько денег у каждого?
- Найдите x, y, z, если $xy = 1$, $yz = 2$, $zx = 8$.
- Решить систему уравнений:
$\begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x. \end{cases}$

1. Груша и яблоко вместе весят 250 г, яблоко и апельсин — 245 г, апельсин и груша — 255 г. Сколько весят три фрукта вместе?
2. Площади трёх граней прямоугольного параллелепипеда равны 180 см², 216 см², 270 см². Чему равны длины ребер параллелепипеда?
3. Три мецената спонсировали поездку школьников на математический фестиваль. Если бы первый дал вдвое больше денег, нежели дал, то было бы собрано 15 000 руб. Если бы это сделал второй, то было бы собрано 17 500 руб. Если бы третий — 18 500 руб. Сколько денег на поездку дал каждый меценат?
4. Четыре школьника сделали в магазине канцелярских товаров следующие покупки: Петя заплатил 120 руб. за пенал и ластик, Вася — 36 руб. за ластик и карандаш, Тимур — 150 руб. за пенал, карандаш и 2 тетради. Яша купил пенал и тетрадь. Сколько он потратил?
5. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} (y+z)x = -5; \\ (x+z)y = 4; \\ (x+y)z = 3. \end{cases}$$
6. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 240 рублей. Два ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 440 рублей. Какова общая стоимость 3 ластиков, 4 ручек и 6 фломастеров?
7. Аня, Ваня, Паша, Настя и Света ели конфеты (причем сами конфеты не делились на части). Когда все конфеты кончились, их спросили: «Кто сколько конфет съел?», на что были получены следующие ответы:
Аня: «Я и Ваня съели 11 конфет»
Паша: «Я и Света съели 9 конфет»
Ваня: «Я, Паша и Настя съели 18 конфет»
Света: «Я, Настя и Аня съели 17 конфет»

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

8. Пусть x, y, z — натуральные числа. Нашли значения $2x + y + z + 1$, $x + 2y + z + 2$, $x + y + 2z + 3$. Докажите, что хотя бы одно из них не кратно четырём.
9. Докажите, что для любых длин сторон треугольника x, y, z выполнено неравенство $x^2 + y^2 + z^2 < 2xy + 2yz + 2xz$.

Блок 1. Системы уравнений

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

На занятии планируется показать, как удобно решать разные «текстовые» задачи, суммируя (или умножая) разные величины, как удобно подобным образом решать системы уравнений, а также взаимосвязи между этими решениями. При решении некоторых задач требуется умение свернуть квадрат выражения.

Предварительные задачи для разбора с учениками.

- Четверо друзей заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 рублей, если без второго — 85 рублей, если без третьего — 80 рублей, если без четвёртого — 75 рублей. Сколько денег у каждого?

  Ответ: у первого — 20, у второго — 25 рублей, у третьего — 30 рублей, у четвертого — 35 рублей.

  Решение. Сложим суммы, указанные в условии: 90 + 85 + 80 + 75 = 330. Заметим, что деньги каждого входят в эту сумму ровно 3 раза. Например, сумма первого входит только в 85, 80 и 75 рублей. Значит, всего у друзей 330 : 3 = 110 рублей.

  Тогда нетрудно найти, сколько рублей у каждого: у первого 110 – 90 = 20, у второго 110 – 85 = 25, у третьего 110 – 80 = 30, у четвертого 110 – 75 = 35.

  Комментарий. Решение можно записать с помощью уравнений.

  Если у друзей было a, b, c, d рублей, то по условию

  $$\begin{cases} b+c+d=90, \\ a+c+d=85, \\ a+b+d=80, \\ a+b+c=75. \end{cases}$$

  В такой системе удобно сначала сложить все уравнения:
  $(b+c+d)+(a+c+d)+(a+b+d)+(a+b+c)=90+85+80+75,$
  $3(a+b+c+d)=330,$
  $a+b+c+d=110.$

  Далее, используя соотношения из системы, можно найти значения переменных:
  $a=(a+b+c+d)-(b+c+d)=110-90=20,$
  $b=(a+b+c+d)-(a+c+d)=110-85=25,$
  $c=(a+b+c+d)-(a+b+d)=110-80=30,$
  $d=(a+b+c+d)-(a+b+c)=110-75=35.$

  Замечание. Зафиксируем удобный приём: можно всё сложить.

- Найдите x, y, z, если $xy=1$, $yz=2$, $zx=8$.

  Ответ: $x=2, y=0{,}5, z=4$ и $x=-2, y=-0{,}5, z=-4$.

  Решение. Перемножим три данных соотношения:
  $xy\cdot yz\cdot zx=1\cdot 2\cdot 8,$
  $(xyz)^2=16=4^2,$
  $xyz=4$ или $xyz=-4.$

  Используя соотношения из условия, можно найти значения переменных. В первом случае получаем:
  $x=(xyz):(yz)=4:2=2,$
  $y=(xyz):(zx)=4:8=0{,}5,$
  $z=(xyz):(xy)=4:1=4.$

  Во втором случае аналогично получаем $x=-2, y=-0{,}5, z=-4$.

- Решить систему уравнений:
  $$\begin{cases} x^2-x+1=y, \\ y^2-y+1=x. \end{cases}$$

  Ответ: $x=1, y=1$.

  Решение. Сложим уравнения и преобразуем:
  $(x^2-x+1)+(y^2-y+1)=x+y,$
  $x^2+y^2-2x-2y+2=0,$
  $(x-1)^2+(y-1)^2=0.$

  Сумма квадратов равна нулю только в случае, когда каждый из квадратов равен нулю. Отсюда следует, что $x=1, y=1$.

Задачи для самостоятельного решения школьниками.

1. Груша и яблоко вместе весят 250 г, яблоко и апельсин — 245 г, апельсин и груша — 255 г. Сколько весят три фрукта вместе?

   Ответ: 375 г.

   Решение. В сумму 250 + 245 + 255 = 750 г массы груши, яблока и апельсина входят по 2 раза. Значит, они вместе весят 750 : 2 = 375 г.

2. Площади трёх граней прямоугольного параллелепипеда равны 180 см², 216 см², 270 см². Чему равны длины ребер параллелепипеда?

   Ответ: 12 см, 15 см и 18 см.

   Решение. Если длины ребер равны a см, b см, c см, то $ab=180, bc=216, ca=270$. Перемножим: $(ab)(bc)(ca)=(abc)^2=180\cdot 216\cdot 270$. Произведение чисел равно

$180 \cdot 216 \cdot 270 = (18 \cdot 10) \cdot (8 \cdot 27) \cdot (27 \cdot 10) = (10 \cdot 27 \cdot 12)^2 = (12 \cdot 15 \cdot 18)^2$. Так как a, b, c положительны, то $abc = 10 \cdot 12 \cdot 18$.

Так как $ab = 180 = 18 \cdot 10$, то $c = 15$.
Так как $bc = 216 = 12 \cdot 18$, то $a = 10$.
Так как $ca = 270 = 15 \cdot 18$, то $b = 12$.

3. Три мецената спонсировали поездку школьников на математический фестиваль. Если бы первый дал вдвое больше денег, нежели дал, то было бы собрано 15 000 руб. Если бы это сделал второй, то было бы собрано 17 500 руб. Если бы третий — 18 500 руб. Сколько денег на поездку дал каждый меценат?

Ответ: 2 250 руб., 4 750 руб., 5 750 руб.

Решение. Заметим, что в сумму 15 000 + 17 500 + 18 500 = 51 000 руб. вклад каждого мецената входит 4 раза. Значит, сумма их вкладов 51 000 : 4 = 12 750 руб. Тогда меценаты выделили 15 000 – 12 750 = 2 250 руб., 17 500 – 12 750 = 4 750 руб. и 18 500 – 12 750 = 5 750 руб.

4. Четыре школьника сделали в магазине канцелярских товаров следующие покупки: Петя заплатил 120 руб. за пенал и ластик, Вася — 36 руб. за ластик и карандаш, Тимур — 150 руб. за пенал, карандаш и 2 тетради. Яша купил пенал и тетрадь. Сколько он потратил?

Ответ: 117 руб.

Решение. Заметим, что речь идёт о суммах П + Л, Л + К, П + К + 2Т. Значит, в сумму 120 + 36 + 150 = 306 руб. входят все четыре товара дважды, значит они вместе стоят 306 : 2 = 153 руб. Яша и Вася вместе купили каждого товара по 1 штуке, значит, Яша потратил 153 – 36 = 117 руб.

5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (y+z)x = -5; \\ (x+z)y = 4; \\ (x+y)z = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x = -1, y = 2, z = 3$ или $x = 1, y = -2, z = -3$.

Указание: найти сначала значения попарных произведений xy, yz, zx.

Решение. Представим систему в виде:

$$\begin{cases} zx + xy = -5; \\ xy + yz = 4; \\ yz + zx = 3. \end{cases}$$

Сложим уравнения и получим $2(xy + yz + zx) = 2$ или $xy + yz + zx = 1$. Тогда $yz = 1 - (-5) = 6, zx = 1 - 4 = -3, xy = 1 - 3 = -2$.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

Получаем:

$$\begin{cases} yz = 6; \\ zx = -3; \\ xy = -2. \end{cases}$$

Перемножим уравнения, получим $(xyz)^2 = 36$, откуда $xyz = 6$ или $xyz = -6$.
В первом случае $x = 6 : 6 = 1, y = 6 : (-3) = -2, z = 6 : (-2) = -3$.
Во втором случае $x = -6 : 6 = -1, y = -6 : (-3) = 2, z = -6 : (-2) = 3$.

6. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 240 рублей. Два ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 440 рублей. Какова общая стоимость 3 ластиков, 4 ручек и 6 фломастеров?

Ответ: 520.

Указание. Переменных больше, чем уравнений, поэтому нельзя найти значение каждой переменной. Но это и не требуется.

Решение. Имеем (Л + 3Р + 2Ф) + (2Л + 5Р + 4Ф) = 3Л + 8Р + 6Ф = 240 + 440 = 680 руб. С другой стороны, 2Л + 6Р + 4Ф = 2 · 240 = 480 руб. Тогда Р = 480 – 440 = 40 руб. Получаем 3Л + 4Р + 6Ф = 680 – 4 · 40 = 520 руб.

7. Аня, Ваня, Паша, Настя и Света ели конфеты (причем сами конфеты не делились на части). Когда все конфеты кончились, их спросили: «Кто сколько конфет съел?», на что были получены следующие ответы:
Аня: «Я и Ваня съели 11 конфет»
Паша: «Я и Света съели 9 конфет»
Ваня: «Я, Паша и Настя съели 18 конфет»
Света: «Я, Настя и Аня съели 17 конфет»
Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

Решение. Запишем условие как А + В = 11, П + С = 9, В + П + Н = 18, С + Н + А = 17. Сложим и получим 2(А + В + Н + П + С) = 55, что невозможно: в равенстве слева чётное число, справа — нечетное. Противоречие. Значит, кто-то из ребят ошибся.

8. Пусть x, y, z — натуральные числа. Нашли значения $2x + y + z + 1, x + 2y + z + 2, x + y + 2z + 3$. Докажите, что хотя бы одно из них не кратно четырём.

Решение. Если бы каждое значение было кратно четырём, то их сумма, равная $(2x + y + z + 1) + (x + 2y + z + 2) + (x + y + 2z + 3) = 4(x + y + z + 1) + 2$, также делилась бы на 4. Но она при делении на 4 даёт остаток 2. Противоречие.

9. Докажите, что для любых длин сторон треугольника x, y, z выполнено неравенство $x^2 + y^2 + z^2 < 2xy + 2yz + 2xz$.

Решение. Запишем неравенства треугольника, возведем в квадрат и сложим:

$$\begin{cases} x+z>y \\ y+x>z \\ z+y>x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>y-z \\ y>z-x \\ z>x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2>(y-z)^2 \\ y^2>(z-x)^2 \\ z^2>(x-y)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2>(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2>2(x^2+y^2+z^2)-2xy-2yz-2zx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2<2xy+2yz+2xz.$$