Блок 5. Делимость. Часть 1

Задания Интернет-карусели (2020)

1. В магазине фундук продают в пачках по 105 г., а фисташки в пачках по 120 г. Какое наименьшее количество пачек орехов надо купить, чтобы фундука и фисташек было поровну (по массе)?
2. Сколько чисел от 1 до 100, у которых в разложении на простые множители число 3 входит нечётное число раз?
3. Число 899 представили в виде произведения двух натуральных чисел. Чему равна сумма этих двух множителей?
4. После урока о простых числах семиклассник Сережа поделился с учителей гипотезой: если число P простое, то число $2P + 1$ тоже простое. Верна эта гипотеза или нет? Если нет, то какое наименьшее число P можно привести в качестве контрпримера?
5. В доме у сороконожки 30 ящиков с носками. Всего 199 носков. В некоторых ящиках лежит по N носков, а в остальных — по 5 носков. Чему равно N?
6. Маша проверяет, какие натуральные числа от 1 до 100 имеют ровно 3 делителя. Сколько таких чисел должна обнаружить Маша?
7. В ряд выписано N чисел, каждое следующее число на 6 больше предыдущего. Любые два выписанных числа взаимно простые. При каком наибольшем N такое возможно?
8. Число 90000 представили в виде произведения двух натуральных чисел. Сумма этих множителей равна 1923. Найдите меньший из этих множителей.
9. Какое наибольшее количество цифр может быть в числе, в котором среди любых двух соседних цифр одна из них делится на другую и никакие цифры не повторяются?
10. Найдите наибольшее число, в котором среди любых двух соседних цифр одна из них делится на другую и никакие цифры не повторяются.
11. Произведение возрастов троих людей из семьи равно 2020. Какой может быть сумма их возрастов, если известно, что самому старому человеку на земле было 146 лет, а в этой семье всем больше года?
12. Васенька вырезали из клетчатой бумаги 3 фигуры, состоящие из целых клеток, первая состоит из 24 клеток, вторая — из 120, третья — из 126. Затем каждую фигуру он порезал по границам клеток на части, при этом все получившиеся части (в том числе от разных фигур) оказались равными. Какое минимальное количество частей могло получиться у Васеньки?

13. Гриша в каждой вершине куба записал натуральное число, большее 1. Любые два числа, расположенные на концах одного ребра, — взаимно простые. Какое наименьшее значение может иметь сумма чисел, записанных Гришей?
14. Гриша в каждой вершине куба записал натуральное число. Среди этих чисел нет равных, а любые два числа, расположенные на концах одного ребра, взаимно простые. Какое наименьшее значение может иметь сумма чисел, записанных Гришей?
15. Данила несколько дней гостил у бабушки. Каждый из этих дней он решал задачи, причём каждый день больше, чем в предыдущий. В последний день он решил в 3 раза больше задач, чем в первый. Если перемножить его каждодневные результаты, то получится 810. Сколько всего задач решил Данила за эти дни?
16. Олег перемножил 2020 подряд идущих натуральных чисел (не обязательно начиная с 1) и получил число S. Затем число S разложили на простые множители. В какой минимальной степени в этом разложении число 3?
17. Барон Мюнхгаузен рассказал своему слуге, что во время путешествия перепрыгнул реку шириной 7 метров. Тот рассказал другому слуге о реке шириной 14 метров. Дальше каждый слуга, передавая эту новость, увеличивал ширину реки в 2 раза или 3 раза. В итоге один из слуг пересказал Барону рассказ о реке шириной 108864 метров. Сколько слуг передавали эту новость?
18. Про некоторое натуральное число сделали 5 утверждений:
    (1) «оно делится на 15»,
    (2) «оно делится на 25»,
    (3) «оно делится на 33»,
    (4) «оно делится на 55»,
    (5) «оно делится на 165».
    Известно, что четыре утверждения верны, а одно — нет.
    Какое из этих утверждений неверно?

Блок 5. Делимость. Часть 1

Задания Интернет-карусели (2020). Указания, ответы и решения

Задания интернет-карусели традиционно не упорядочены по сложности. При разборе задач можно выбирать иной порядок, например, по методам, используемых при решении.

Обратите внимание, что лучше рассмотреть парами задачи № 9 и № 10, № 13 и № 14.

Условия задач № 13 и № 15 поправлены и отличаются от предлагаемых на карусели.

1. В магазине фундук продают в пачках по 105 г., а фисташки в пачках по 120 г. Какое наименьшее количество пачек орехов надо купить, чтобы фундука и фисташек было поровну (по массе)?

   Ответ: 15

   Решение. Чтобы фисташек и фундука было по n г. необходимо, чтобы n было кратно 105 и 120. Минимальное значение n равно наименьшему общему кратному 105 и 120, НОК $(105; 120) =$ НОК $(3 \cdot 5 \cdot 7;\ 2^3 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ г. Чтобы набрать такое количество, надо $(2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) : 105 = 8$ пачек фундука и $(2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) : 120 = 7$ пачек фисташек. Всего $8 + 7 = 15$ штук.

2. Сколько чисел от 1 до 100, у которых в разложении на простые множители число 3 входит нечётное число раз?

   Ответ: 24

   Решение. Чисел, кратных трём, ровно $[100 : 3] = 33$ (так как каждое третье делится на 3), кратных 9 — ровно $[100 : 9] = 11$, кратных 27 — ровно $[100 : 27] = 3$, кратных 81 — ровно $[100 : 81] = 1$.

   Подходят числа, которые делятся на 3, но не делятся на 9. К ним надо добавить числа, которые делятся на 27, но не делятся на 81. Таким образом искомых чисел $(33 - 11) + (3 - 1) = 24$.

3. Число 899 представили в виде произведения двух натуральных чисел. Чему равна сумма этих двух множителей?

   Ответ: 60 или 900.

   Решение. Число 899 — произведение двух простых чисел, поэтому раскладывается на множители двумя способами: $29 \cdot 31$ и $1 \cdot 899$. Сумма множителей равна $29 + 31 = 60$ или $1 + 899 = 900$.

4. После урока о простых числах семиклассник Сережа поделился с учителей гипотезой: если число P простое, то число $2P + 1$ тоже простое. Верна эта гипотеза или нет? Если нет, то какое наименьшее число P можно привести в качестве контрпримера?

   Ответ: 7

   Решение. Эта гипотеза неверна.
   Проверим первые простые числа.
   Если $P = 3$, то $2P + 1 = 7$ — простое.
   Если $P = 5$, то $2P + 1 = 11$ — простое.
   Если $P = 7$, то $2P + 1 = 15$ — составное.
   Минимальный контрпример, опровергающий гипотезу, при $P = 7$.

   Комментарий. Пока еще наука не нашла формулы, как быстро получать новые простые числа.

5. В доме у сороконожки 30 ящиков с носками. Всего 199 носков. В некоторых ящиках лежит по N носков, а в остальных — по 5 носков. Чему равно N?

   Ответ: 12 или 54.

   Решение. Пусть у сороконожки K ящиков по N носков и $30 - K$ ящиков по 5 носков. Тогда из условия $KN + 5(30 - K) = 199$, откуда $K(N - 5) = 49$. Значит, $N - 5$ равно 1, 7 или 49. В первом случае число ящиков более 30, остальные варианты подходят. Значит, N равно $5 + 7 = 12$ или $5 + 49 = 54$.

6. Маша проверяет, какие натуральные числа от 1 до 100 имеют ровно 3 делителя. Сколько таких чисел должна обнаружить Маша?

   Ответ: 4

   Указание: три делителя имеют только квадраты простых чисел.

   Решение. Каждое число имеет 2 делителя — 1 само себя и число 1. Значит, искомое число составное и имеет некоторый простой делитель p. Чтобы других делителей не было, само число должно равняться p^2. Квадраты простых чисел, не превосходящие 100, — числа 2^2, 3^2, 5^2, 7^2 (всего 4 штуки).

7. В ряд выписано N чисел, каждое следующее число на 6 больше предыдущего. Любые два выписанных числа взаимно простые. При каком наибольшем N такое возможно?

   Ответ: 9

   Решение. В набор из 9 чисел 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59 любые два взаимно простые. Если взять любые 10 чисел, то среди них будет два, кратных 5, они не будут взаимно простыми.

   Комментарий. Несмотря на краткость объяснения, найти пример не так просто. Заметим, что числа в наборе (1) дают равные остатки при делении на 6, (2) не должны быть кратны 2 или 3. Поэтому можно проверять наборы, начинающиеся с чисел вида $6N + 1$ или $6N + 5$ (где N — целое неотрицательное число), то есть с 1, 5, 7, 11 и так далее. Уже четвертый случай даёт пример из 9 чисел.

8. Число 90000 представили в виде произведения двух натуральных чисел. Сумма этих множителей равна 1923. Найдите меньший из этих множителей.

Ответ: 48.

Решение. Пусть $90000 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = A \cdot B$, $A + B = 1923$.

Сумма $A + B$ делятся на 3, один из слагаемых делится на 3, значит, второе слагаемое также делится на 3.

Сумма $A + B$ не делится на 5, поэтому, все множители 5 относятся только к одному слагаемому.

Сумма $A + B$ не делится на 2, поэтому, все множители 2 относятся только к одному слагаемому.

Значит, числа A и B — это либо $3 \cdot 2^4 \cdot 5^4$ и 3, либо $3 \cdot 2^4$ и $3 \cdot 5^4$. В первом случае сумма не равна 1923, во втором — равна. Значит, искомые числа 48 и 1875, меньшее из них — 48.

9. Какое наибольшее количество цифр может быть в числе, в котором среди любых двух соседних цифр одна из них делится на другую и никакие цифры не повторяются?

Ответ: 10.

Указание. Заметьте, что число 0 делится на любое другое число, а любое число кратно числу 1.

Решение. В искомом числе не может быть более 10 цифр. Не трудно проверить, что число 9362841705 состоит из всех 10 цифр и удовлетворяет условию.

10. Найдите наибольшее число, в котором среди любых двух соседних цифр одна из них делится на другую и никакие цифры не повторяются.

Ответ: 9362841705

Решение. В искомом числе не может быть более 10 цифр. Не трудно проверить, что число 9362841705 состоит из всех 10 цифр и удовлетворяет условию. Оно наибольшее. Действительно, в нём максимальное возможное количество цифр, первая цифра — наибольшая из возможных, а каждая следующая максимально возможная из цифр, не использованных ранее.

11. Произведение возрастов троих людей из семьи равно 2020. Какой может быть сумма их возрастов, если известно, что самому старому человеку на земле было 146 лет, а в этой семье всем больше года?

Ответ: 110 или 113

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

Решение. Так как $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, то чей-то возраст должен делиться на 101. Так как $101 \cdot 2 > 146$, то кому-то ровно 101 год. Тогда двум другим либо 4 года и 5 лет, либо 2 года и 10 лет. Сумма равна $101 + 4 + 5 = 110$ или $101 + 2 + 10 = 113$.

12. Васенька вырезали из клетчатой бумаги 3 фигуры, состоящие из целых клеток, первая состоит из 24 клеток, вторая — из 120, третья — из 126. Затем каждую фигуру он порезал по границам клеток на части, при этом все получившиеся части (в том числе от разных фигур) оказались равными. Какое минимальное количество частей могло получиться у Васеньки?

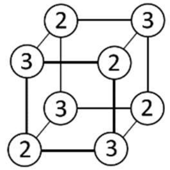
Ответ: 45.

Решение. Чем больше площадь части, тем меньше самих частей. Площадь одной части — делитель чисел 24, 120, 126. Значит, наибольшая её площадь равна наибольшему общему делителю этих чисел, НОД (24; 120; 126) = 6. Значит, искомое количество равно $24 : 6 + 120 : 6 + 126 : 6 = 4 + 20 + 21 = 45$. Такое количество возможно. Например, если прямоугольники 6×4, 6×20, 6×21 разрезали на части 1×6.

13. Гриша в каждой вершине куба записал натуральное число, большее 1. Любые два числа, расположенные на концах одного ребра, — взаимно простые. Какое наименьшее значение может иметь сумма чисел, записанных Гришей?

Ответ: 20.

Указание: можно расставить только числа 2 и 3.

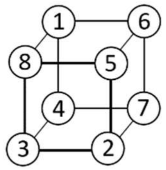


Решение. Рассмотрим 4 вертикальных ребра. Любые два числа на концах любого их них различны, их сумма не более 2 + 3. С другой стороны, в вершинах можно расставить числа 2 и 3 (рисунок справа) так, что каждое ребро соединяет 2 и 3. Тогда сумма будет $4 \cdot (2 + 3) = 20$.

14. Гриша в каждой вершине куба записал натуральное число. Среди этих чисел нет равных, а любые два числа, расположенные на концах одного ребра, взаимно простые. Какое наименьшее значение может иметь сумма чисел, записанных Гришей?

Ответ: 36.

Указание: можно расставить числа от 1 до 8.



Решение. Минимальные возможные числа в вершинах — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Их можно расставить, например, так, как показано на рисунке справа. Искомая сумма равна $1 + 2 + \ldots + 8 = 36$.

15. Данила несколько дней гостил у бабушки. Каждый из этих дней он решал задачи, причём каждый день больше, чем в предыдущий. В последний день он решил в 3 раза

больше задач, чем в первый. Если перемножить его каждодневные результаты, то получится 810. Сколько всего задач решил Данила за эти дни?

Ответ: 23.

Решение. Разложим данное число на простые множители: $810 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5$. Если бы количество решенных задач в первый день делилось на 2 или 5, то в последний — тоже, произведение чисел было бы кратно 4 или 25, чего нет. Если бы количество задач в первый день делилось на 9, то в последний — на 27, а все произведение было бы кратно 3^5, что не так. Значит, в первый день задач было 3 задачи, в последний — 9. Между ними возможны только 5 и 6. Всего решенных задач $3 + 5 + 6 + 9 = 23$.

16. Олег перемножил 2020 подряд идущих натуральных чисел (не обязательно начиная с 1) и получил число S. Затем число S разложили на простые множители. В какой минимальной степени в этом разложении число 3?

Ответ: 1005.

Решение. Так как $[2020 : 3] = 673$, то всего не менее 673 чисел, кратных 3. Аналогично не менее $[2020 : 9] = 224$ чисел кратных 3^2 и так далее. Значит, в разложении произведения чисел на простые множители число 3 входит в степени, не меньшей $[2020 : 3] + [2020 : 3^2] + [2020 : 3^3] + [2020 : 3^4] + [2020 : 3^5] + [2020 : 3^6]$, что равно $673 + 224 + 74 + 24 + 8 + 2 = 1005$. Их будет ровно столько, если произведение чисел от 1 до 2020.

17. Барон Мюнхгаузен рассказал своему слуге, что во время путешествия перепрыгнул реку шириной 7 метров. Тот рассказал другому слуге о реке шириной 14 метров. Дальше каждый слуга, передавая эту новость, увеличивал ширину реки в 2 раза или 3 раза. В итоге один из слуг пересказал Барону рассказ о реке шириной 108864 метров. Сколько слуг передавали эту новость?

Ответ: 11.

Решение. Поскольку $108864 = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 7$, изначально было число 7, то нужно 6 раз умножать на 2 и 5 раз умножать на 3. Значит, искомое количество слуг равно $6 + 5 = 11$.

18. Про некоторое натуральное число сделали 5 утверждений:
(1) «оно делится на 15»,
(2) «оно делится на 25»,
(3) «оно делится на 33»,
(4) «оно делится на 55»,
(5) «оно делится на 165».
Известно, что четыре утверждения верны, а одно — нет.
Какое из этих утверждений неверно?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

Ответ: 2.

Решение. Одно из утверждений (1) и (4) верно, поэтому число делится на 5. Одно из утверждений (1) и (3) верно, поэтому число делится на 3. Одно из утверждений (3) и (4) верно, поэтому число делится на 11. Значит, число кратно $3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$ и утверждения (1), (3), (4), (5) верные. Значит, не верно утверждение (2).