Блок 4. Турниры

Подготовительное занятие

В задачах про турниры часто речь идёт об *однокруговых* турнирах: в течение такого турнира каждые две команды-участницы играют между собой одну игру.

После каждой игры участники получают баллы. Есть разные системы. Например, в *шахматном* турнире за победу дают 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В *футбольном* турнире за ничью дают 1 очко, за проигрыш — 0 очков, за победу в одних турнирах дают 2 очка (система 2-1-0), в других — 3 очка (система 3–1-0).

- Аня, Боря, Валя и Гена сыграли однокруговой турнир в «Крестики-нолики» и начали заносить результаты в турнирную таблицу: В — число выигрышей, Н — ничьих, П — поражений. Они успели заполнить только 4 клетки. Заполните все остальные, выдавая очки как в шахматах.

	Аня	Боря	Валя	Гена	В	Н	П
Аня						2	
Боря						1	
Валя					3		
Гена							1

- Прошёл однокруговой шахматный турнир, в котором приняли участие 8 человек.
(а) Сколько партий сыграл каждый участник?
(б) Сколько прошло партий в течение всего турнира?
(в) Какова сумма всех очков, проставленных в таблице?
(г) Может ли оказаться, что последнее место занял игрок с 0 очками, а предпоследнее — игрок, заработавший только 0,5 очка?

- В однокруговом турнире по шахматам участвовало 4 человека. Аня набрала 2,5 очка, Боря — 1 очко, Вова — 0,5 очка. Какое место заняла Галя?

1. В однокруговом футбольном турнире команд А, Б, В, Г по системе 3-1-0 команда А заняла первое место, а команда Б набрала 3 очка и заняла «чистое» второе место (то есть команда выше нее набрала больше очков, а команда ниже неё — меньше очков). Восстановите результаты всех матчей.

2. Шахматист сыграл в турнире 20 партий и получил 12,5 очков. На сколько больше он выиграл партий, чем проиграл?

3. Шесть команд в течение зимы должны сыграть однокруговой турнир. Болельщик Петя назвал число игр, которое каждая команда сыграла до Нового Года: 3, 3, 2, 2, 2, 1. Может ли такое быть или Петя ошибается?

4. В футбольном турнире пяти команд по системе 3-1-0 победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?

5. Десять футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по N очков по системе 3-1-0. Каково наибольшее возможное значение N?

6. (а) В однокруговом шахматном турнире участвовало 8 человек: 3 мальчика и 5 девочки. Могли ли мальчики по итогам турнира набрать в 1,5 раза больше очков, чем девочки?

   (б) В однокруговом шахматном турнире участвовало 6 человек: 2 мальчика и 4 девочек. Могли ли мальчики по итогам турнира набрать в два раза больше очков, чем девочки?

7. В однокруговом турнире победитель набрал больше очков, чем все остальные. Может ли какая-то другая команда иметь больше побед, если (а) очки по системе 2-1-0 (б) очки по системе 3-1-0?

8. В однокруговом турнире восьми шахматистов все набрали разное количество очков. Участник, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько участники, занявшие с 5 по 8 место вместе. Кто выиграл в игре между третьим и пятым местом?

9. В турнире участвовали 50 шахматистов. В некоторый момент турнира была сыграна 61 партия, причем каждый участник сыграл либо две партии, либо три (и никто не играл друг с другом дважды). Докажите, что какие-то два шахматиста, сыгравшие по три партии, сыграли между собой.

Блок 4. Турниры

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

- Данное занятие посвящено задачам про турниры. Выбраны задачи про круговые турниры и не затрагивается, например, олимпийская система «на выбывание». Одна из целей — научить обращать внимание на подсчёт разных величин (количество игр, общая сумма очков), которые могут служить основой для дальнейших рассуждений.

- Рекомендуем обратить внимание на следующие момента.

  (1) При обсуждении первых задач, возможно, будет необходимо объяснить, как заполняются турнирные таблицы. К сожалению, многие школьники не в курсе, как устроены подобные таблицы.

  (2) Стоит показать ученикам взаимосвязи турниров с графами, о которых говорится в комментариях к решениям.

  (3) В части заданий от учеников ждут не только умений в подсчёте и рассуждениях, но и умений в построениях примеров турнирных таблиц.

- Рекомендуем обсудить задачи, отмеченные точкой. Задания с номерами — для самостоятельного решения школьниками.

В задачах про турниры часто речь идёт об *однокруговых* турнирах: в течение такого турнира каждые две команды-участницы играют между собой одну игру.

После каждой игры участники получают баллы. Есть разные системы. Например, в *шахматном* турнире за победу дают 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В *футбольном* турнире за ничью дают 1 очко, за проигрыш — 0 очков, за победу в одних турнирах дают 2 очка (система 2-1-0), в других — 3 очка (система 3–1-0).

- Аня, Боря, Валя и Гена сыграли однокруговой турнир в «Крестики-нолики» и начали заносить результаты в турнирную таблицу: В — число выигрышей, Н — ничьих, П — поражений. Они успели заполнить только 4 клетки. Заполните все остальные, выдавая очки как в шахматах.

	Аня	Боря	Валя	Гена	В	Н	П
Аня						2	
Боря						1	
Валя					3		
Гена							1

  Решение. Так как Валя имеет три победы, то можно заполнить строку и столбец, соответствующие результатам её игр.

Тогда понятно, что Аня проиграла Вале, а остальные две игры закончила вничью. Внесём эти результаты в таблицу (первая таблица справа).

	Аня	Боря	Валя	Гена	В	Н	П
Аня			0			2	
Боря			0			1	
Валя	1	1		1	3	0	0
Гена			0				1

Осталось определить результат игры между Борей и Геной. Из строки Бори ясно, что это не ничья. Из строки Гены — что он не мог проиграть. Значит, Гена выиграл. Получаем вторую таблицу справа.

	Аня	Боря	Валя	Гена	В	Н	П
Аня		1/2	0	1/2	0	2	1
Боря	1/2		0			1	
Валя	1	1		1	3	0	0
Гена	1/2		0				1

Оставшиеся ячейки заполняются автоматически (см. третью таблицу справа).

	Аня	Боря	Валя	Гена	В	Н	П
Аня		1/2	0	1/2	0	2	1
Боря	1/2		0	0	0	1	2
Валя	1	1		1	3	0	0
Гена	1/2	1	0		1	1	1

- Прошёл однокруговой шахматный турнир, в котором приняли участие 8 человек.
  (а) Сколько партий сыграл каждый участник?
  (б) Сколько прошло партий в течение всего турнира?
  (в) Какова сумма всех очков, проставленных в таблице?
  (г) Может ли оказаться, что последнее место занял игрок с 0 очками, а предпоследнее — игрок, заработавший только 0,5 очка?

  Ответ: (а) 7, (б) 28, (в) 28.

  Решение. Каждый игрок сыграл с 7 соперниками. Всего «участий» в партиях $7 \cdot 8 = 56$, в каждой партии реализуется два «участия», поэтому, число партий равно $56 : 2 = 28$. Заметим, что в шахматном турнире после каждой игры между игроками распределяется 1 очко. Значит, сумма всех очков равна числу партий, то есть равна 28.

  Комментарий 1. Каждый турнир можно изобразить графом, где команды (участники) — вершины, прошедшие игры — ребра. Значит, вопрос «сколько всего прошло игр» даёт тот же ответ, что и вопрос «сколько ребер в полном графе».

  Комментарий 2. Обобщим результаты и будем их использовать при решении задач в дальнейшем. Если в круговом турнире n участников, то всего пройдёт $n(n-1)/2$ игр. При системе 1-0,5-0 будет распределено $n(n-1)/2$ очков, при системе 2-1-0 распределят $n(n-1)$ очков.

  (г) Ответ: нет, такого не может быть.

  Решение. В игре между последним и предпоследним распределяется 1 очко, значит, в сумме они должны набрать не 0,5 очков, а не менее 1 очка.

- В однокруговом турнире по шахматам участвовало 4 человека. Аня набрала 2,5 очка, Боря — 1 очко, Вова — 0,5 очка. Какое место заняла Галя?

  Ответ: 2 место.

  Решение. Всего было сыграно 6 партий, значит, в итоге между участниками распределено 6 очков. Значит, Галя набрала 6 – 2,5 – 1 – 0,5 = 2 очка. Значит, она заняла 2 место.

  Комментарий. Здесь сложно искать ответ, пытаясь однозначно определить результаты всех партий, так как надо рассматривать много случаев. Рекомендуем предложить ученикам найти несколько вариантов заполнения турнирной таблицы, удовлетворяющих условию задачи.

1. В однокруговом футбольном турнире команд А, Б, В, Г по системе 3-1-0 команда А заняла первое место, а команда Б набрала 3 очка и заняла «чистое» второе место (то есть команда выше нее набрала больше очков, а команда ниже неё — меньше очков). Восстановите результаты всех матчей.

   Решение. (1) Команды В и Г между собой точно сыграли ничью (таблица 1), иначе у кого-то из них было бы хотя бы 3 очка.

   (2) Команда Б не может проиграть В или Г (иначе у В или Г будет более 3 очков), а выиграть тоже не может (у неё будет более 3 очков). Значит, Б сыграла вничью со всеми (таблица 2).

   (3) Команды В и Г должны проиграть команде А, тогда восстанавливаются все результаты (таблица 3).

	А	Б	В	Г	
А	■				
Б		■			3
В			■	1	
Г			1	■	

таблица 1

	А	Б	В	Г	
А	■				
Б	1	■	1	1	3
В		1	■	1	
Г		1	1	■	

таблица 2

	А	Б	В	Г	
А	■	1	3	3	7
Б	1	■	1	1	3
В	0	1	■	1	2
Г	0	1	1	■	2

таблица 3

2. Шахматист сыграл в турнире 20 партий и получил 12,5 очков. На сколько больше он выиграл партий, чем проиграл?

   Ответ: побед на 5 больше, нежели поражений.

   Решение 1 (рассуждения). Рассмотрим случай, когда данный игрок не проигрывал. Если были только ничьи, то он бы набрал 10 очков. Значит, 12,5 – 10 = 2,5 «лишних» очка он заработал на победах, по 0,5 очка на каждой игре (по сравнению с ничьёй). Значит, у него 2,5 : 0,5 = 5 побед и 20 – 5 = 15 ничьих. Искомая разность равна 5 – 0 = 5.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

   Если вместо одной ничьи игрок проигрывает, то для сохранения общей суммы баллов нужно другую ничью заменить на победу. Так искомая разность не меняется, то есть она всегда равна 5.

   Решение 2 (алгебра). Пусть игрок выиграл W партий, проиграл L партий и (20 – W – L) игр закончил вничью.

   Он получил 12,5 = W + 0,5(20 – W – L) = 0,5(W – L) + 10 очков, откуда W – L = 5.

3. Шесть команд в течение зимы должны сыграть однокруговой турнир. Болельщик Петя назвал число игр, которое каждая команда сыграла до Нового Года: 3, 3, 2, 2, 2, 1. Может ли такое быть или Петя ошибается?

   Ответ: Петя ошибается.

   Решение. Пусть Петя прав. Найдём число проведенных игр. Число «участий» равно 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 = 13. В каждой игре реализуют два «участия». Значит, прошло 13 : 2 — нецелое число игр, что невозможно. Значит, Петя ошибается.

   Комментарий. Рассмотрим граф, в котором вершины — команды, ребра — проведенные игры. Сумма степеней вершин полученного графа чётна, но она (по словам Пети) равна 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 = 13. Противоречие.

4. В футбольном турнире пяти команд по системе 3-1-0 победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?

   Ответ: 6.

   Решение. Победитель может набрать максимум 12 баллов (4 победы по 3 балла). Остальные 4 команды сыграют между собой 6 игр. В каждой игре распределяется 2 очка (если ничья) или 3 очка (если кто-то выиграл). Значит, эти 4 команды в сумме получат не менее 2 · 6 = 12 очков.

   Значит, победитель должен набрать 12 очков, выиграв у всех остальных, а остальные игры (между оставшимися 4 командами) должны закончиться вничью.

5. Десять футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по N очков по системе 3-1-0. Каково наибольшее возможное значение N?

   Ответ: 13.

Решение. Было сыграно 45 матчей. За каждый матч между командами распределяли 2 (если была ничья) или 3 очка. Значит, всего между командами распределено не более $3 \cdot 45 = 135$ очков.

Если в результате у каждой команды ровно по N очков, то общее число очков равно $10N$, то есть кратно 10. Значит, $N \leq 13$. Пример, когда $N = 13$, приведен справа.

	1	3	0	3	0	3	0	3	0
1		0	3	0	3	0	3	0	3
0	3		1	3	0	3	0	3	0
3	0	1		0	3	0	3	0	3
0	3	0	3		1	3	0	3	0
3	0	3	0	1		0	3	0	3
0	3	0	3	0	3		1	3	0
3	0	3	0	3	0	1		0	3
0	3	0	3	0	3	0	3		1
3	0	3	0	3	0	3	0	1	

Комментарий. В данной ситуации, построение примера — не менее сложная часть решения, нежели оценка. Его несложно построить, если сделать полезные выводы:

(1) если матч закончился в ничью, то сумма всех очков в таблице уменьшается на 1, значит, в таком турнире $135 - 130 = 5$ ничьих;

(2) если команда получила 13 очков, то у неё должна быть ничья (иначе число очков будет кратно 3); то есть, команды должны быть разбиты на 5 пар, в матчах которых были ничьи, а остальные матчи закончились победами;

(3) значит, у каждой команды 1 ничья, 4 победы и 4 поражения.

6. (а) В однокруговом шахматном турнире участвовало 8 человек: 3 мальчика и 5 девочки. Могли ли мальчики по итогам турнира набрать в 1,5 раза больше очков, чем девочки?

(б) В однокруговом шахматном турнире участвовало 6 человек: 2 мальчика и 4 девочек. Могли ли мальчики по итогам турнира набрать в два раза больше очков, чем девочки?

(а) Ответ: нет.

Решение. Всего сыграно 28 партий, то есть всего игроки распределили между собой 28 очков. Если мальчики набрали в 1,5 раза больше очков, чем девочки, то у них $3t$ очков, у девочек — $2t$ очков. Тогда $5t = 28$, $t = 5{,}6$. Получается, что девочки набрали 11,2 очков, что невозможно по правилам начисления очков.

(б) Ответ: нет.

Решение. Всего сыграно 15 партий, то есть всего игроки распределили между собой 15 очков. Если мальчики набрали в 2 раза больше очков, чем девочки, то у них 10 очков, у девочек — 5 очков.

Каждый мальчик сыграл 5 партий, то есть набрал не более 5 очков. Значит, оба мальчика получили по 5 очков, выиграв все партии. Такое невозможно: в партии между ними не могут оба победить.

7. В однокруговом турнире победитель набрал больше очков, чем все остальные. Может ли какая-то другая команда иметь больше побед, если (а) очки по системе 2-1-0 (б) очки по системе 3-1-0?

Ответ: (а) может, (б) может.

(а) Решение. Пример турнирной таблицы показан ниже.

Участники	I	II	III	IV	V	VI	С
Команда I	X	2	2	1	1	1	7
Команда II	0	X	0	2	2	2	6
Команда III	0	2	X	1	1	1	5
Команда IV	1	0	1	X	1	1	4
Команда V	1	0	1	1	X	1	4
Команда VI	1	0	1	1	1	X	4

(б) Решение. Пример турнирной таблицы показан ниже.

Участники	I	II	III	IV	V	VI	VII	С
Команда I	X	3	3	1	1	1	1	10
Команда II	0	X	0	0	3	3	3	9
Команда III	0	3	X	1	1	1	1	7
Команда IV	1	3	1	X	1	1	1	8
Команда V	1	0	1	1	X	1	1	5
Команда VI	1	0	1	1	1	X	1	5
Команда VII	1	0	1	1	1	1	X	5

8. В однокруговом турнире восьми шахматистов все набрали разное количество очков. Участник, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько участники, занявшие с 5 по 8 место вместе. Кто выиграл в игре между третьим и пятым местом?

Ответ: выиграл игрок, занявший 3 место.

Решение. Четверо игроков, занявших с 5 по 8 места, сыграли между собой 6 игр. Значит, они набрали в сумме не менее 6 очков.

С другой стороны, игрок, занявший 2 место, не мог набрать более 6 очков. Действительно. Если у него не менее 6,5 очков, то у победителя должно быть ровно 7 очков. Победитель все партии выиграл. Занявший второе место ни разу не проиграл. Эти выводы противоречат друг другу: партия между ними не могла состояться.

Значит, игроки, занявшие 5-8 места, вместе набрали только 6 очков. То есть, они проиграли все партии с остальными игроками. В частности, игрок, занявший 5 место, проиграл игроку, занявшему 3 место.

9. В турнире участвовали 50 шахматистов. В некоторый момент турнира была сыграна 61 партия, причем каждый участник сыграл либо две партии, либо три (и никто не играл друг с другом дважды). Докажите, что какие-то два шахматиста, сыгравшие по три партии, сыграли между собой.

Решение. Пусть N шахматистов сыграли по три партии, $(50 - N)$ — по две. Число $3N + 2(50 - N)$ — удвоенное суммарное количество сыгранных партий (поскольку в каждой партии участвуют два игрока). Значит, $3N + 2(50 - N) = 2 \cdot 61$, откуда $N = 22$.

Предположим, никакие два из 22 шахматистов (сыгравших три партии), не играли между собой. Тогда они играли только с шахматистами, сыгравшими по две партии, то есть провели $3 \cdot 22 = 66$ партий, что более 61. Противоречие с условием задачи.