# Блок 15. Разрезания и замощения

## *Задания Интернет-карусели (2020)*

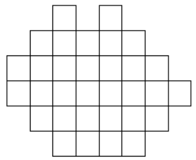
1. Чтобы разрезать клетчатый прямоугольник $2 \times 3$ на уголки из трёх клеток, надо сделать разрез длины 3. Какой длины надо сделать разрезы, чтобы поделить прямоугольник $123 \times 2$ на уголки из трёх клеток?

2. Сколькими способами клетчатый прямоугольник $15 \times 2$ можно разрезать на уголки из трёх клеток? Способы, получаемые друг из друга поворотами и переворотами, считать различными.

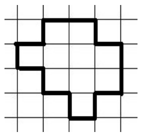
3. Семен хочет вырезать из клетчатого прямоугольника $57 \times 2$ один уголок из трёх клеток так, чтобы его брат Ваня не смог разрезать остальную часть на уголки из трёх клеток. Сколькими способами он может это сделать? Способы, получаемые друг из друга поворотами и переворотами, считать различными.

4. Клетчатый квадрат $8 \times 8$ разрезают на уголки из 3 клеток и квадраты $2 \times 2$. Сколько может быть частей?

5. Бумажную клетчатую фигуру, показанную на рисунке, разрезать на 2 части, которые можно совместить при наложении (фигуры можно поворачивать и переворачивать). Какова длина проведенных разрезов?



6. На сколько равных частей можно разрезать данную клетчатую фигуру? Разрезы можно делать только по сторонам клеток.



7. Какое наименьшее число клеток можно вырезать из клетчатого прямоугольника $3 \times 19$, чтобы вся оставшаяся часть разрезалась на доминошки $1 \times 2$ ровно одним способом?

8. На столе стоят 3 вазочки с конфетами, в первой — 101 конфета, во второй — 88 конфет, в третьей — 72 конфеты. Каждую минуту к столу подбегает ребенок и берет по конфете из 2 разных вазочек. Через какое минимальное количество минут может оказаться, что во всех вазах поровну конфет?

9. Деревянный куб $6 \times 6 \times 6$ покрашен снаружи. Его распилили на бруски $1 \times 1 \times 2$. Брусок сильно окрашен, если у него окрашена *хотя бы одна грань*. Какое наибольшее число брусков может оказаться сильно окрашенными?



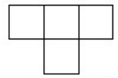
Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2019-2020 учебный год

10. Деревянный куб $6 \times 6 \times 6$ покрашен снаружи. Его распилили на бруски $1 \times 1 \times 2$. Брусок сильно окрашен, если у него окрашены *хотя бы две грани*. Какое наибольшее число брусков может оказаться сильно окрашенными?

11. Клетчатый прямоугольник $5 \times 6$ разрезали на $N$ частей по сторонам клеток так, что среди них не оказалось равных. При каком наибольшем $N$ это возможно? (Фигуры называются равными, если их можно вырезать из бумаги и совместить).

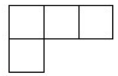
12. Васенька разрезал клетчатую фигуру из 88 клеток на прямоугольники $7 \times 3$ и $5 \times 1$. Сколько из них прямоугольников $5 \times 1$?

13. Петенька может один и тот же клетчатый прямоугольник разрезать только на Т-тетрамино или только на Г-тетрамино. Какой наименьшей площади мог быть этот прямоугольник?



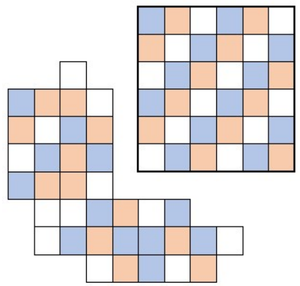
Т-тетрамино

14. Петенька может один и тот же клетчатый прямоугольник, не являющийся квадратом, разрезать только на Т-тетрамино или только на Г-тетрамино. Какой наименьшей площади мог быть этот прямоугольник?



Г-тетрамино

15. У Петеньки был раскрашенный квадрат (показан на рисунке). Он разрезал его на четыре равные части, возможно повернул какие-то части, и сложил другую фигуру, показанную на рисунке. Какова суммарная длина разрезов, с помощью которых поделили квадрат, если длины стороны одной клетки равна 1?



# Блок 15. Разрезания и замощения

## *Задания Интернет-карусели (2020). Указания и решения*

- Задания интернет-карусели традиционно не упорядочены по сложности. При разборе задач можно выбирать иной порядок, например, по методам, используемых при решении.

1. Чтобы разрезать клетчатый прямоугольник $2 \times 3$ на уголки из трёх клеток, надо сделать разрез длины 3. Какой длины надо сделать разрезы, чтобы поделить прямоугольник $123 \times 2$ на уголки из трёх клеток?

   Ответ: 203.

   Решение 1. При делении прямоугольника $123 \times 2$ на уголки будут образовываться блоки $2 \times 3$ из двух уголков. Поэтому, можно сначала разделить на $123 : 3 = 41$ такой блок (40 разрезов длины 2), а затем каждый поделить на уголки (41 разрез длины 3). Итого $40 \cdot 2 + 41 \cdot 3 = 203$.

   Решение 2. Всего получится $123 \cdot 2 : 3 = 82$ уголка. Их общий периметр равен $82 \cdot 8$. Часть периметра участвует в разрезах, а часть — в границе прямоугольника. Периметр прямоугольника равен $(123 + 2) \cdot 2 = 250$, поэтому в разрезах участвует $82 \cdot 8 - 250 = 406$ от общего периметра. И поскольку в разрезе всегда участвуют две границы уголков, получаем длину $406 : 2 = 203$.

   Комментарий. Самый популярный неправильный ответ, конечно, «123». Действительно, если для $2 \times \underline{3}$ разрез длины $\underline{3}$, то для $2 \times \underline{123}$ разрез длины $\underline{123}$,

2. Сколькими способами клетчатый прямоугольник $15 \times 2$ можно разрезать на уголки из трёх клеток? Способы, получаемые друг из друга поворотами и переворотами, считать различными.

   Ответ: 32.

   Решение. При делении прямоугольника $15 \times 2$ на уголки будут образовываться блоки $2 \times 3$ из двух уголков — всего 5 штук. Каждый может быть поделен на уголки 2 способами. Значит, всего $2^5 = 32$ способа.

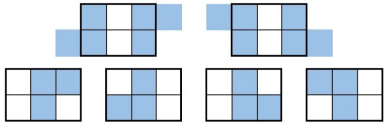
3. Семен хочет вырезать из клетчатого прямоугольника $57 \times 2$ один уголок из трёх клеток так, чтобы его брат Ваня не смог разрезать остальную часть на уголки из трёх клеток. Сколькими способами он может это сделать? Способы, получаемые друг из друга поворотами и переворотами, считать различными.

   Ответ: 148.





   Решение. Разобьем прямоугольник $57 \times 2$ на блоки $3 \times 2$ — их $57 : 3 = 19$ штук. Будем считать, что уголок в том блоке, в котором у него 2 клетки. Всего 8 положений уголка в блоке, при которых остальное нельзя разрезать на уголки, они показаны на рисунке. В первом и последнем блоке только 6 только положений.

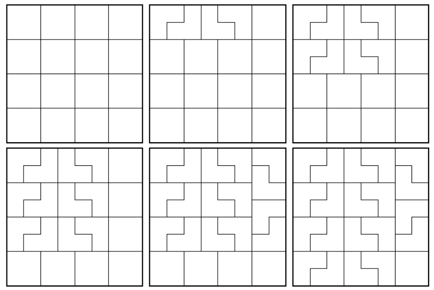


   Итого $6 \cdot 2 + 17 \cdot 8 = 148$ положений.

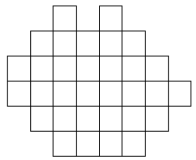
4. Клетчатый квадрат $8 \times 8$ разрезают на уголки из 3 клеток и квадраты $2 \times 2$. Сколько может быть частей?

   Ответ: 16, 17, 18, 19, 20 или 21.

   Решение. Всего 64 клетки. Если частей было бы менее 16, то в них было не более $15 \cdot 4 = 60$ клеток. Если частей было бы более 21, то в них было не менее $22 \cdot 3 = 66$ клеток. То и другое невозможно. Значит, частей от 16 до 21. Все эти варианты возможны.

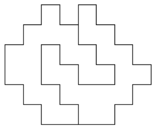


5. Бумажную клетчатую фигуру, показанную на рисунке, разрезать на 2 части, которые можно совместить при наложении (фигуры можно поворачивать и переворачивать). Какова длина проведенных разрезов?

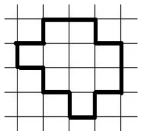


   Ответ: 17.

   Решение. Единственный возможный способ разрезания показан на рисунке.

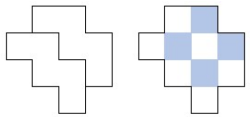


6. На сколько равных частей можно разрезать данную клетчатую фигуру? Разрезы можно делать только по сторонам клеток.



Ответ: 2 10.

Решение. В фигуре 10 клеток, поэтому ее можно разрезать только на 2, 5 или 10 фигур, равных по площади. Если разрезать на единичные клетки, то получится 10 равных частей. Способ разрезать на 2 равные части показан на рисунке справа.

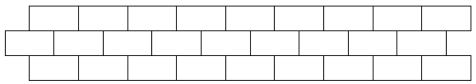


Если бы можно было разрезать на 5 частей, то части содержали бы по 2 клетки. При «шахматной» раскраске клетки в каждой части должны быть разного цвета. Но при «шахматной» раскраске получается разное число клеток разного цвета (показано на рисунке).

7. Какое наименьшее число клеток можно вырезать из клетчатого прямоугольника $3 \times 19$, чтобы вся оставшаяся часть разрезалась на доминошки $1 \times 2$ ровно одним способом?

Ответ: 3.

Решение. Не трудно убедиться, что если вырезать 3 клетки, показанные на рисунке, то оставшаяся часть разделяется на уголки единственным способом.

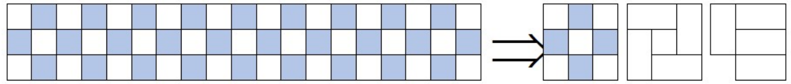


Меньшим числом вырезанных клеток обойтись нельзя. Если вырезать 2 клетки, то останется нечётное число клеток, оставшаяся часть не будет биться на доминошки.

Покажем, что 1 клетку вырезать также недостаточно. Раскрасим клетки прямоугольника в шахматном порядке. Если всё без 1 клетки разрезали на доминошки, то осталась белая клетка (так как их больше).



Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2019-2020 учебный год



Предположим, что вырезана 1 белая клетка. Будем отрезать с концов прямоугольника блоки ширины 2 (их можно поделить на доминошки), пока не останется квадрат $3 \times 3$ с вырезанной белой клеткой. На рисунке показано, что какая бы белая клетка не была вырезана (центральная или угловая), эту часть можно поделить на доминошки. Видно, что способов будет более одного, так как даже оставшуюся часть в каждом из случаев можно разбить иначе.

8. На столе стоят 3 вазочки с конфетами, в первой — 101 конфета, во второй — 88 конфет, в третьей — 72 конфеты. Каждую минуту к столу подбегает ребенок и берет по конфете из 2 разных вазочек. Через какое минимальное количество минут может оказаться, что во всех вазах поровну конфет?

Ответ: 42.

Решение. Разницу в первой и второй вазочках $101 - 88 = 13$ можно убрать только используя третью вазу. Тогда в 3 вазе останется не более чем $72 - 13 = 59$ конфет. Тогда заберут не менее $(101 - 59) + (88 - 59) + (72 - 59) = 42 + 29 + 13 = 84$ конфет за $84 : 2 = 42$ минуты. За 42 минуты это возможно: 13 раз берем конфеты из первой и третьей вазы, 29 раз — из первой и второй.

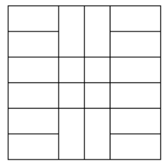
9. Деревянный куб $6 \times 6 \times 6$ покрашен снаружи. Его распилили на бруски $1 \times 1 \times 2$. Брусок сильно окрашен, если у него окрашена *хотя бы одна грань*. Какое наибольшее число брусков может оказаться сильно окрашенными?

Ответ: 104.

Решение. Рассмотрим куб $2 \times 2 \times 2$ в центре данного. Если брусок содержит хотя бы один его кубик, то он уже не может быть сильно окрашенным (до грани он «не дотянется»). Значит, сильно окрашенные бруски состоят не более чем из $6 \cdot 6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 208$ кубиков, то есть таких брусков не более $208 : 2 = 104$.

С другой стороны, можно центральный куб $2 \times 2 \times 2$ сложить из 4 брусков, а остальные бруски расположить так, что каждый будет «выходить на поверхность» куба.

Например, расположим в каждом из 6 слоёв 16 брусков, как показано на рисунке справа. Останется «колодец» $2 \times 2$, куба можно вставить 4 + 4 окрашенных брусков и 4 неокрашенных.



Получим всего $16 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 104$ сильно окрашенных брусков.

10. Деревянный куб $6 \times 6 \times 6$ покрашен снаружи. Его распилили на бруски $1 \times 1 \times 2$. Брусок сильно окрашен, если у него окрашены *хотя бы две грани*. Какое наибольшее число брусков может оказаться сильно окрашенными?

Ответ: 48.

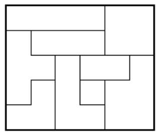
Решение. Рассмотрим $4 \cdot 12 = 48$ кубиков на ребрах куба, у которых ровно 2 покрашенные грани. Заметим, что каждый сильно окрашенный брусок должен содержать хотя бы один такой кубик. Значит, сильно окрашенных брусков не более 48.

С другой стороны, в разбиении на бруски, описанном в решении задачи № 9, есть 48 сильно окрашенных брусков.

11. Клетчатый прямоугольник $5 \times 6$ разрезали на $N$ частей по сторонам клеток так, что среди них не оказалось равных. При каком наибольшем $N$ это возможно? (Фигуры называются равными, если их можно вырезать из бумаги и совместить).

Ответ: 9

Решение. Всего 1 фигура из 1 клетки, 1 фигура из 2 клеток, 2 фигуры из 3 клеток (прямоугольник и уголок). Если фигуру собрали из 10 (или более) различных фигур, то в ней не менее $1 + 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (10 - 4) = 33$ клеток.



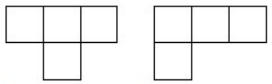
Значит, прямоугольник $5 \times 6$ из 30 клеток разрезали не более чем на 9 различных частей. С другой стороны, можно получить 9 различных частей, один из примеров показан на рисунке справа.

12. Васенька разрезал клетчатую фигуру из 88 клеток на прямоугольники $7 \times 3$ и $5 \times 1$. Сколько из них прямоугольников $5 \times 1$?

Ответ: 5.

Решение. Прямоугольников $7 \times 3$ не более 4, они занимают по 21 клетке, после них из 88 клеток должно остаться количество, кратное 5. Значит, из 3 штуки, а прямоугольников $5 \times 1$ — $(88 - 3 \cdot 21) : 5 = 5$ штук.

13. Петенька может один и тот же клетчатый прямоугольник разрезать только на Т-тетрамино или только на Г-тетрамино. Какой наименьшей площади мог быть этот прямоугольник?



Т-тетрамино Г-тетрамино

Ответ: 16

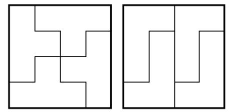
Решение. Раскрасим клетки прямоугольник в шахматном порядке.





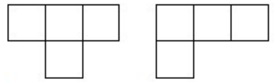
Его можно разрезать на Г-тетрамино, в каждой фигурке по 2 клетки каждого цвета. Значит, в нём чёрных и белых клеток поровну.

Его можно разрезать на Т-тетрамино, в каждой фигурке или 3 черных и 1 белая клетка, или 1 черная и 3 белых клетки. Так как чёрных и белых клеток поровну, то Т-тетрамино каждого вида должно быть поровну.



Вывод: количество Т-тетрамино чётно. Из двух Т-тетрамино не составить прямоугольник, а из 4 штук можно составить квадрат $4 \times 4$, который можно разделить и на Г-тетрамино. В нём 16 клеток.

14. Петенька может один и тот же клетчатый прямоугольник, не являющийся квадратом, разрезать только на Т-тетрамино или только на Г-тетрамино. Какой наименьшей площади мог быть этот прямоугольник?



Т-тетрамино Г-тетрамино

Ответ: 32

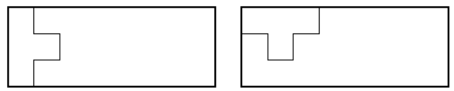
Указание. Нечетное число частей быть не может, прямоугольники (не квадраты) из 8, 16, 24 клеток не разрезать на Т-тетрамино, а прямоугольник $8 \times 4$ — можно.

Решение. Из решения задачи № 13 следует, что количество Т-тетрамино в разбиении должно быть четно.

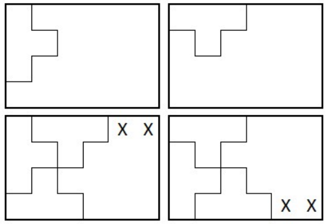
Если прямоугольник составили из 4 штук Т-тетрамино, то он — квадрат $4 \times 4$ ($1 \times 16$ и $2 \times 8$ не разрезать на Т-тетрамино), что не подходит по условию.

Если прямоугольник составили из 6 штук Т-тетрамино, то его размеры $1 \times 24$, $2 \times 12$, $3 \times 8$ или $4 \times 6$. Первые два, очевидно, не разбивается на Т-тетрамино.

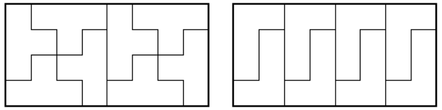
Прямоугольник $3 \times 8$ разбить на Т-тетрамино также нельзя. Действительно, угловая клетка накрывается фигуркой 2 способами (см. рисунок). Видно, что обоих случаях продолжить его не получится.



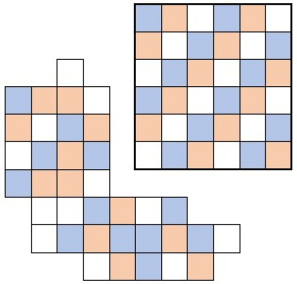
Угол прямоугольника $4 \times 6$ также можно накрыть 2 способами, после чего еще 3 фигурки вырезаются однозначно (см. рисунок). Клетки, отмеченные крестиком, накрыть Т-тетрамино нельзя.




Значит, минимальное количество Т-тетрамино в прямоугольнике — 8 штук. Тогда общая площадь 32. Этот случай возможен (см. рисунок).



15. У Петеньки был раскрашенный квадрат (показан на рисунке). Он разрезал его на четыре равные части, возможно повернул какие-то части, и сложил другую фигуру, показанную на рисунке. Какова суммарная длина разрезов, с помощью которых поделили квадрат, если длины стороны одной клетки равна 1?



Ответ: 24.

Решение. Однозначно можно провести разрезы между клетками одного цвета. Далее можно разрезать на 4 равные фигуры только одним способом, как показано на рисунке (клетки, относящиеся к одной части, отмечены одной и той же буквой).



Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2019-2020 учебный год