

Математика, 9 класс (1 декабря 2016 года)

Задания и ответы

1. Дано натуральное число N . К нему в конце приписали цифру 6, в результате оно увеличилось на 1815. Чему равно N ?

Ответ: 201.

2. Графики функций $y = kx + 4$ и $y = 2x + 2k$ пересекаются на оси абсцисс. Найдите площадь треугольника, образованного этими графиками и осью ординат.

Ответ: 8.

Указание. Первая прямая пересекает ось абсцисс при $x = -4/k$, вторая — при $x = -k$. Значит, $k = \pm 2$. При $k = 2$ графики совпадают, что противоречит условию. При $k = -2$ имеем графики $y = -2x + 4$ и $y = 2x - 4$.

Графики показаны на рисунке, площадь треугольника равна 8.

3. Точка с координатами $M(x; y)$ — середина медианы AK треугольника ABC с вершинами $A(-12; 16)$, $B(24; 52)$, $C(4; -40)$. Найдите $x + 2y$.

Ответ: 23.

Указание. Середина BC имеет координаты $(14; 6)$. Середина медианы имеет координаты $(1; 11)$.

4. Найдите $4X + 10Y$, если одновременно выполнено $X + Y = 9XY$, $X - Y = XY$.

Ответ: 0, 3.

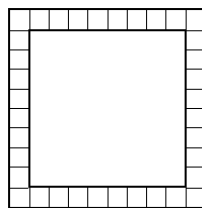
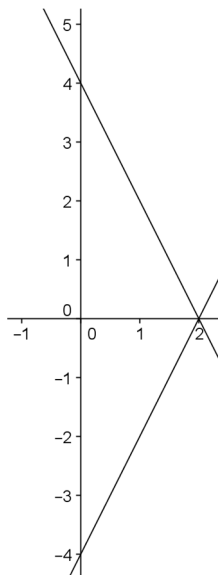
Указание. Решения системы: $(0; 0)$ и $(1/4; 0,2)$.

5. Дана клетчатая рамка 10×10 толщиной в одну клетку. Её разрезали на части и сложили из них квадрат 6×6 . Среди частей нет равных. Каково наибольшее число частей?

Ответ: 9.

6. Найдите значение $12000x$, если

$$\frac{(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{x^2}}{2x^2} = 1000.$$



Ответ: -12.

Указание. Значение x отрицательно, поэтому уравнение эквивалентно соотношению $-x - x = 2000x^2$, откуда $x = -1/1000$. Тогда $12000x = -12$.

7. Дан параллелограмм $ABCD$, точка O — центр параллелограмма, точка E на стороне CD такова, что $EC = 2ED$. Найдите $12a + 18b$, если $\overrightarrow{AE} = a \cdot \overrightarrow{OB} + b \cdot \overrightarrow{OC}$.

Ответ: 16.

Указание: $\overrightarrow{AE} = -2/3 \cdot \overrightarrow{OB} + 4/3 \cdot \overrightarrow{OC}$

8. Сколькими способами 2016 рублей можно разменять монетами достоинством 2 руб. и 5 руб.? Способы считать разными только в случае, когда выдаётся разное число монет одного достоинства.

Ответ: 202.

Указание. Монетами 5 руб. мы должны разменять чётное число рублей, то есть, сумму, кратную 10 рублям. Таких сумм 202, остальное можно разменять монетами по 2 руб.

9. Какие из утверждений про треугольник являются верными?

- (1) Центры вписанной и описанной окружности могут совпадать.
- (2) Отрезок, соединяющий центры вписанной и описанной окружности, может пересекать сторону треугольника.
- (3) Центр вписанной окружности может лежать вне треугольника.
- (4) Центр описанной окружности может лежать на стороне треугольника.
- (5) Радиус описанной окружности может быть в 1000 раз больше радиуса вписанной окружности.

Ответ: 1 2 4 5.

10. Журналист приехал на остров, на котором живут только рыцари и лжецы. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Он спросил каждого жителя про каждого из остальных, лжец он или рыцарь. Было получено 76 ответов «рыцарь» и 80 ответов «лжец». Сколько рыцарей могло быть на острове?

Ответ: 5 или 8.

Указание. Было 13 жителей, из которых 5 рыцарей и 8 лжецов. Было дано $12 \cdot 13 = 156$ ответов, из которых $5 \cdot 8 + 8 \cdot 5 = 80$ ответов «лжец», $5 \cdot 4 + 8 \cdot 7 = 76$ ответов «рыцарь». Также возможно наоборот: 8 рыцарей и 5 лжецов.

11. Точка O — пересечение диагоналей трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD . Длина средней линии трапеции в 2 раза больше длины основания CD . Найдите отношение площадей треугольников ABO и CDO .

Ответ: 9.

12. К числу 523 в конце дописали трёхзначное число N . Получили шестизначное число, кратное 7, 8 и 9. Чему равно N ?

Ответ: 152 656.

13. Найдите значение $x_1x_2^2 + x_2x_1^2$,
где x_1, x_2 — корни уравнения

$$x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 0.$$

Ответ: 1.

Указание. По теореме Виета получаем:

$$x_1x_2^2 + x_2x_1^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.$$

14. Два лыжника стартовали друг за другом с интервалом в 6 минут. Второй догнал первого на расстоянии 2 км от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от точки поворота. Сколько км/ч составляет скорость первого лыжника?

Ответ: 10.

Указание. Если x км/ч — скорость первого лыжника, y км/ч — скорость второго лыжника, то $2/x - 2/y = 1/10$, $4/x - 6/y = 1/10$, откуда $x = 10$, $y = 20$.