Блок 9. Обратный ход

Интернет-карусель. Условия задач

1. Женщина собрала в саду персики. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через четыре двери, каждую из которых охранял свирепый стражник, отбиравший треть персиков. Домой она принесла 32 персика. Сколько персиков досталось стражникам?

2. У Кролика было поровну банок мёда и банок варенья. После того, как Винни-Пух съел 75 банок мёда и 54 банки варенья, банок варенья осталось в 4 раза больше, чем банок мёда. Сколько банок мёда было у Кролика?

3. Неудачник Вася собрал N тыс. рублей и вложил их в чужой бизнес. Через месяц он потерял пятую часть этой суммы. Еще через месяц — четверть остатка. За третий месяц растаяла треть оставшейся суммы. Чтобы Вася не забрал оставшиеся деньги, в четвёртый месяц владельцы бизнеса удвоили вклад Васи, после чего его вклад в бизнес стал равен 400 тыс. рублей. Чему было равно N?

4. Над озёрами летели гуси. На первом озере села половина гусей и еще половина гуся. На втором озере села треть летевших туда гусей и еще треть гуся. Остальные 29 гусей сели на третьем озере. Сколько было гусей?

5. Ковбои Макс и Гоша три дня вдвоём играли в карты. В первый день Макс проиграл половину своих монет и отдал их Гоше. Во второй день Гоша проиграл половину своих и отдал их Максу. На третий день Макс снова проиграл половину своих и отдал их Гоше. В результате у Макса оказалось 75 монет, а у Гоши — 165 монет. Сколько монет было у ковбоя Макса в начале?

6. Петя приобрёл в магазине чудо-автомат. Сначала в него надо положить 1 конфету. Затем за 5 рублей аппарат умножает число конфет в нём на 3, а за 2 рубля — увеличивает число конфет в аппарате на 4. Забрать конфеты из аппарата можно 1 раз и все сразу. Петя хочет получить в аппарате ровно 2017 конфет. Какую наименьшую сумму денег он может потратить?

7. Коля задумал некоторое число. Умножил его на 17, изменил последнюю цифру, разделил на 13, умножил на 4, откинул последнюю цифру и получил 6. Какое число задумал Коля?

8. Юный ботаник Вася посадил росток бамбука и 7 дней записывал рост, получив 7 целых чисел. Он обратил внимание, что за день высота бамбука каждый день увеличивалась в 7 раз или на 8 см. Седьмое записанное Васей число равно 124. Чему равно первое число, если оно менее 70?

9. На каждом игральном кубике на гранях расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Два кубика совместили гранями. Сумма очков на 10 видимых гранях равна 31. На сколько отличаются числа на двух гранях, которые совместили?

10. На пиратском корабле есть сундук с золотом, к которому есть доступ только у капитана Флинта. Каждый вечер Флинт забирает из сундука треть монет, а с утра еще 2 монеты. За эти три дня Флинт не положил в сундук ни монеты, а на четвертый вечер открыл сундук и обнаружил там всего 2 монеты. Сколько монет он потратил за 3 дня?

11. На ужин кок Джон Сильвер приготовил очень вкусные пирожки. Билли Бонс съел половину всех пирожков, после чего Джон отложил два пирожка для капитана Флинта. После этого пришел Слепой Пью и съел половину оставшихся пирожков. Тогда Джон отложил последние три пирожка для Флинта и ушел. Сколько пирожков испек Джон Сильвер?

12. Иван ставит ладей на шахматную доску. Первую он ставит в любую клетку. Каждую следующую он может поставить только в клетку, которая находятся под боем 1 или 3 ладей, поставленных ранее. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске? Ладья бьет по вертикали и по горизонтали на любое число клеток, но не бьёт не через другую фигуру.

13. Андрей выписал первую тысячу натуральных чисел в тетрадь следующим образом: сначала записал в порядке возрастания числа с суммой цифр 1 (это 1, 10, 100 и 1000), затем записал в порядке возрастания числа с суммой цифр 2, потом — в порядке возрастания числа с суммой цифр 3 и так далее. На каком месте оказалось число 978?

14. Найдите наибольшее пятизначное число ВЕСНА, если $(В + Е + С + Н) \times А = 196$. Одинаковыми буквами заменили равные цифры, разные — разными.

15. Шахматную доску распилили на прямоугольники по границам клеток. Оказалось, что частей, в которых черных клеток у них больше, чем белых, ровно N штук.

    Выберите варианты, для которых это верно:
    (1) N = 1; (2) N = 16; (3) N = 31; (4) N = 45; (5) N = 50.

Блок 9. Обратный ход

Задания интернет-карусели. Указания и решения

Некоторые задачи можно решить уравнением. Если это доступно ученикам, полезно разобрать оба способа. См. решения задач № 3, № 4, № 11.

Задачи, не связанные с темой «Обратный ход»: № 2, № 9, № 14, № 15.

1. Женщина собрала в саду персики. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через четыре двери, каждую из которых охранял свирепый стражник, отбиравший треть персиков. Домой она принесла 32 персика. Сколько персиков досталось стражникам?

   Ответ: 130 персиков.

   Решение. Выполним действия в обратном порядке. Если забрали треть персиков и осталось n штук, то было $n : 2 \cdot 3$ штук. Тогда
   $32 : 2 \cdot 3 = 48$ персиков было у женщины перед четвёртыми воротами,
   $48 : 2 \cdot 3 = 72$ персиков было у женщины перед третьими воротами,
   $72 : 2 \cdot 3 = 108$ персиков было у женщины перед вторыми воротами,
   $108 : 2 \cdot 3 = 162$ персиков собрала женщина,
   $162 – 32 = 130$ персиков досталось стражникам.

2. У Кролика было поровну банок мёда и банок варенья. После того, как Винни-Пух съел 75 банок мёда и 54 банки варенья, банок варенья осталось в 4 раза больше, чем банок мёда. Сколько банок мёда было у Кролика?

   Ответ: 82.

   Решение. Осталось на $75 – 54 = 21$ банок варенья больше, нежели банок мёда. Варенья осталось 4 части, мёда — 1 часть, $4 – 1 = 3$ части равны 21. Значит, банок мёда осталось $21 : 3 = 7$, а изначально было $7 + 75 = 82$.

3. Неудачник Вася собрал N тыс. рублей и вложил их в чужой бизнес. Через месяц он потерял пятую часть этой суммы. Еще через месяц — четверть остатка. За третий месяц растаяла треть оставшейся суммы. Чтобы Вася не забрал оставшиеся деньги, в четвёртый месяц владельцы бизнеса удвоили вклад Васи, после чего его вклад в бизнес стал равен 400 тыс. рублей. Чему было равно N?

   Ответ: 500.

   Решение (обратный ход). После 3 месяца вклад в бизнес был равен $400 : 2 = 200$ тыс. Это оставшиеся 2/3 вклада после 2 месяца, значит, после 2 месяца было $200 : 2 \cdot 3 = 300$ тыс. Аналогично, после 1 месяца было $300 : 3 \cdot 4 = 400$ тыс., а в начале — $400 : 4 \cdot 5 = 500$ тыс.

   Замечание. Сравните с задачей № 1 подготовительного задания.

   Комментарий. В данном случае удобно решать задачу и «в прямую».

   Решение (прямой ход). Удобно считать, что Вася вложил $5t$ тыс. рублей. Тогда сначала у него стало $4t$ тыс. рублей, затем — $3t$ тыс. рублей, после третьего месяца — $2t$ тыс. рублей, а потом стало $400 = 4t$ тыс. рублей. Значит, $t = 100$, $N = 5t = 500$.

4. Над озёрами летели гуси. На первом озере села половина гусей и еще половина гуся. На втором озере села треть летевших туда гусей и еще треть гуся. Остальные 29 гусей сели на третьем озере. Сколько было гусей?

   Ответ: 89 гусей.

   Решение. Из условия 29 гусей с третью гуся — это две трети гусей, улетевших с первого озера. Это составляет $29 \cdot 3 + 1 = 88$ третей, с первого озера улетело $88 : 2 \cdot 3 = 44 \cdot 3$ третей или 44 цельных гусей.

   Повторим подобные рассуждения. С первого озера улетело 88 половинок гусей. Из условия, $88 + 1 = 89$ половинок — это половина всех гусей. Значит, было $89 : 2 \cdot 2 = 89$ цельных гусей.

   Замечание. Если в начале летело x гусей, то получаем уравнение
   $$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + 29 = x.$$

   Комментарий. Рекомендуем вспомнить классическую задачу на этот сюжет:

   Над озерами летели гуси. На каждом садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на семи озерах. Сколько было гусей?

   Ответ: 127.
   Указание: $127 \to 63 \to 31 \to 15 \to 7 \to 3 \to 1$.

5. Ковбои Макс и Гоша три дня вдвоём играли в карты. В первый день Макс проиграл половину своих монет и отдал их Гоше. Во второй день Гоша проиграл половину своих и отдал их Максу. На третий день Макс снова проиграл половину своих и отдал их Гоше. В результате у Макса оказалось 75 монет, а у Гоши — 165 монет. Сколько монет было у ковбоя Макса в начале?

   Ответ: 120.

   Указание: $(75; 165) \leftarrow (150; 90) \leftarrow (60; 180) \leftarrow (120; 120)$.

   Решение. Общее число у ковбоев не меняется, так как все монеты они передают друг другу. Оно равно $75 + 165 = 240$.

В начале третьего дня у Макса было $75 \cdot 2 = 150$ монет, следовательно, у Гоши было $240 - 150 = 90$ монет.

В начале второго дня у Гоши было $90 \cdot 2 = 180$, а у Макса $240 - 180 = 60$ монет.

И наконец, в начале первого дня у Макса $60 \cdot 2 = 120$.

6. Петя приобрёл в магазине чудо-автомат. Сначала в него надо положить 1 конфету. Затем за 5 рублей аппарат умножает число конфет в нём на 3, а за 2 рубля — увеличивает число конфет в аппарате на 4. Забрать конфеты из аппарата можно 1 раз и все сразу. Петя хочет получить в аппарате ровно 2017 конфет. Какую наименьшую сумму денег он может потратить?

   Ответ: 42 рубля.

   Решение. Посмотрим, как изменялось число конфет и конца в начало. Заметим 2 момента.

   (1) Если число конфет не кратно 3, то его могли получить только операцией «+4». Если число конфет кратно 3, то его могли получать любой из двух операций.

   (2) Пусть был такой кусок действий: $\ldots \xleftarrow{+4} \ldots \xleftarrow{+4} \ldots \xleftarrow{+4} \ldots \xleftarrow{\times 3} \ldots$. Тот же результат можно получить операциями $\ldots \xleftarrow{\times 3} \ldots . \xleftarrow{+4} \ldots$, это будет дешевле.

   Вывод: Петя сначала прибавлял по 4, а первой же операции «×3» использовал операции «+4» не более 2 раз подряд.

   Рассмотрим такую цепочку действий стоимостью $8 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 44$ рубля:

   $$2017 \xleftarrow{+4} 2013 \xleftarrow{\times 3} 671 \xleftarrow{+4} 667 \xleftarrow{+4} 663 \xleftarrow{\times 3} 221 \xleftarrow{+4} 217 \xleftarrow{+4}$$

   $$\leftarrow 213 \xleftarrow{\times 3} 71 \xleftarrow{+4} 67 \xleftarrow{+4} 63 \xleftarrow{\times 3} 21 \xleftarrow{\times 3} 7 \xleftarrow{+4} 3 \xleftarrow{\times 3} 1.$$

   Петя действовал либо так, либо в начале несколько раз подряд делал «+4». Он мог это делать до чисел 21, 213 и больших. До числа 21 это делать выгодно: он потратит $2 \cdot 5 = 10$ рублей вместо $5 + 2 + 5 = 12$ рублей, что на 2 рубля меньше. Не трудно проверить, что до 213 и далее так делать невыгодно.

   Значит, Петя потратит минимум $44 - 2 = 42$ рубля.

7. Коля задумал некоторое число. Умножил его на 17, изменил последнюю цифру, разделил на 13, умножил на 4, откинул последнюю цифру и получил 6. Какое число задумал Коля?

   Ответ: 12.

   Решение. Есть три двузначных числа, кратных 4, начинающихся с цифры «6»: 60, 64 и 68. Рассмотрим три варианта.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2016-2017 учебный год

   (1) Число 60 получили из 15, 15 получили из $15 \cdot 13 = 195$. Чисел вида 19∗, кратных 17, нет. Поэтому этот вариант невозможен.

   (2) Число 64 получили из 16, 16 получили из $16 \cdot 13 = 208$. Число вида 20∗, кратное 17, только одно — 208. Тогда Коля задумал число $204 : 17 = 12$.

   (3) Число 68 получили из 17, 17 получили из $17 \cdot 13 = 221$. Число вида 22∗, кратное 17, только одно — 221. Тогда Коля цифру не менял, что противоречит условию.

   Значит, Коля задумал число 12.

8. Юный ботаник Вася посадил росток бамбука и 7 дней записывал рост, получив 7 целых чисел. Он обратил внимание, что за день высота бамбука каждый день увеличивалась в 7 раз или на 8 см. Седьмое записанное Васей число равно 124. Чему равно первое число, если оно менее 70?

   Ответ: 12.

   Указание: $124 \leftarrow 116 \leftarrow 108 \leftarrow 100 \leftarrow 92 \leftarrow 84 \leftarrow 12$.

   Решение. Так как 124 не делится на 7. Надо вычитать 8, пока не будет возможна делимость на 7: $124 \leftarrow 116 \leftarrow 108 \leftarrow 100 \leftarrow 92 \leftarrow 84$. Осталось определить первое показание: оно либо $84 - 8 = 76$ (противоречит условию), либо $84 : 7 = 12$.

9. На каждом игральном кубике на гранях расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Два кубика совместили гранями. Сумма очков на 10 видимых гранях равна 31. На сколько отличаются числа на двух гранях, которые совместили?

   Ответ: 1.

   Решение. Сумма чисел на гранях одного кубика $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Сумма на двух кубиках $21 \cdot 2 = 42$. На невидимых гранях сумма $42 - 31 = 11$. Она набирается только как $5 + 6$.

   Комментарий. Можно также рассмотреть похожую задачу.

   На каждом игральном кубике на гранях расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Два кубика совместили гранями. Сумма очков на 10 видимых гранях равна 39. Какие грани совместили?

   Ответ: 1 и 2.

   Решение. Сумма чисел на гранях одного кубика $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Сумма на двух кубиках $21 \cdot 2 = 42$. На невидимых гранях сумма $42 - 39 = 3$. Она набирается только как $1 + 2$.

10. На пиратском корабле есть сундук с золотом, к которому есть доступ только у капитана Флинта. Каждый вечер Флинт забирает из сундука треть монет, а с утра еще 2 монеты. За эти три дня Флинт не положил в сундук ни монеты, а на четвертый вечер открыл сундук и обнаружил там всего 2 монеты. Сколько монет он потратил за 3 дня?

Ответ: 19.

Решение. Утром четвёртого дня в сундуке было 2 + 2 = 4 монеты. Теперь посчитаем, какая часть монет остается в сундуке на утро: если вечером Флинт забирает треть монет, то в нем остается две трети монет. Значит вечером предыдущего дня в сундуке было $4 \cdot 3 : 2 = 6$. Считая аналогично, получаем, что до этого было $(6 + 2) \cdot 3 : 2 = 12$ монет, а в начале было $(12 + 2) \cdot 3 : 2 = 21$ монет. Значит, капитан Флинт потратил 21 – 2 = 19 монет.

11. На ужин кок Джон Сильвер приготовил очень вкусные пирожки. Билли Бонс съел половину всех пирожков, после чего Джон отложил два пирожка для капитана Флинта. После этого пришел Слепой Пью и съел половину оставшихся пирожков. Тогда Джон отложил последние три пирожка для Флинта и ушел. Сколько пирожков испек Джон Сильвер?

Ответ: 16.

Решение. До прихода Слепого Пью было $3 \cdot 2 = 6$ пирожков. Тогда после того, как Билли Бонс съел половину, стало 6 + 2 = 8 пирожков. Значит, Джон Сильвер приготовил $8 \cdot 2 = 16$ пирожков.

Замечание. Если Джон Сильвер приготовил x пирожков, то получаем уравнение

$$x = \frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 3.$$

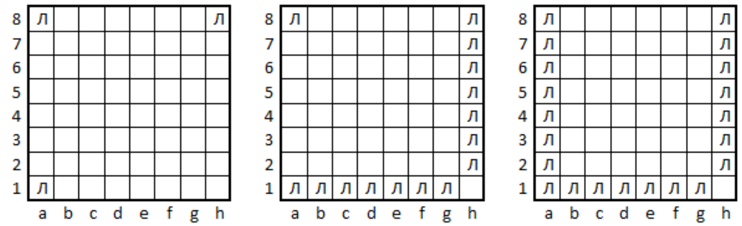
12. Иван ставит ладей на шахматную доску. Первую он ставит в любую клетку. Каждую следующую он может поставить только в клетку, которая находятся под боем 1 или 3 ладей, поставленных ранее. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске? Ладья бьет по вертикали и по горизонтали на любое число клеток, но не бьёт не через другую фигуру.

Ответ. 63.

Решение. Предположим, что можно поставить на доску 64 ладьи, то есть заполнить ее целиком. Рассмотрим отдельно угловые клетки. После того как заполнены три угловые клетки доски, нельзя поставить ладью в четвёртый угол, так как оттуда она, независимо от расположения других ладей, будет бить ровно две из них.

Покажем, как можно поставить 63 ладьи.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2016-2017 учебный год



Сначала поставим ладьи на клетки a1, a8 и h8 (рисунок 1). Заполним первую горизонталь от b1 до g1 (на рисунке 2) и последнюю вертикаль от h8 до h2 (на рисунке 3). Далее можно заполнять последовательно пустые клетки на вертикалях: от a2 до a7, затем от b2 до b8 и так далее.

13. Андрей выписал первую тысячу натуральных чисел в тетрадь следующим образом: сначала записал в порядке возрастания числа с суммой цифр 1 (это 1, 10, 100 и 1000), затем записал в порядке возрастания числа с суммой цифр 2, потом — в порядке возрастания числа с суммой цифр 3 и так далее. На каком месте оказалось число 978?

Ответ: 988.

Решение. Выписанные числа имеют сумму цифр от 1 до 27. Сумма цифр числа 978 равна 24. Причём самое большое из выписанных с такой суммой цифр — это 996 (так как в первых двух разрядах стоят максимально большие цифры), а после него идут 987 и наше число 978. Значит, после числа 978 выписаны только числа 987, 996 (2 штуки) и все числа с суммой цифр 25, 26, 27.

Сумму цифр 27 имеет только число 999 (1 штука).

Сумму цифр 26 имеют только числа 998, 989 и 899 (3 штуки).

Сумму цифр 25 имеют только числа 997, 979, 799; 988, 898, 889 (6 штук).

Таким образом, перед числом 996 написано 2 + 1 + 3 + 6 = 12 чисел. Значит, оно оказалось на месте с номером 1000 – 12 = 988.

14. Найдите наибольшее пятизначное число ВЕСНА, если $(В + Е + С + Н) \times А = 196$. Одинаковыми буквами заменили равные цифры, разные — разными.

Ответ: 98657.

Указание: $(9 + 8 + 6 + 5) \times 7 = 196$.

Решение. Не трудно проверить, что из всех возможных цифр 196 делится только на 1, 2, 4 и 7. Получаем 196 : 1 = 196, 196 : 2 = 98, 196 : 4 = 49, 196 : 7 = 28.

С другой стороны, сумма В + Е + С + Н не более 9 + 8 + 7 + 6 = 30. Значит, подходит только 196 : 7 = 28. Получаем В + Е + С + Н = 28, А = 7.

Чтобы число ВЕСНА было наибольшим, поставим В = 9, Е = 8, С = 6. Остается Н = 28 – 9 – 8 – 6 = 5. Получаем ВЕСНА = 98657.

15. Шахматную доску распилили на прямоугольники по границам клеток. Оказалось, что частей, в которых черных клеток у них больше, чем белых, ровно N штук.

Выберите варианты, для которых это верно:
(1) N = 1; (2) N = 16; (3) N = 31; (4) N = 45; (5) N = 50.

Ответ: 1 2 3.

Решение. На доске поровну белых и чёрных клеток. В любом клетчатом прямоугольнике число чёрных и белых клеток либо одинаково, либо отличается на 1. Значит, на каждую часть, где на 1 чёрную клетку больше, должна приходиться часть, где больше на 1 белую клетку. Вывод: частей, в которых черных клеток у них больше, чем белых, не более половины, то есть, не более 32.

С другой стороны, возможен пример на любое число от 0 до 32: разобьем доску на доминошки, затем нужное число доминошек разделим на отдельные клетки.