

## Блок 8. Ребусы

### Подготовительное занятие

- Замените звёздочки цифрами, чтобы равенства стали верными:

(а)  $5* + *84 = ***0$ ;

(б)  $** + * = **8$ ;

(в)  $6*5* - *8*4 = 2856$ .

- Решите ребусы:

(а) Б + БЕЕЕ = МУУУ;

(б) ДРАМА + ДРАМА = ТЕАТР;

(в) ЧАЙ : АЙ = 5.

Решить ребус — заменить буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным. При этом одинаковые буквы заменяются равными цифрами, а разные буквы — разными цифрами.

1. Сколькими способами можно заменить звёздочки цифрами, чтобы равенства стали верными:

(а)  $3*86 + *2*7 = 804*$ ;

(б)  $5927 + **45 + 78** = 1821*$

2. Решите ребус: АВА + ВАВ = ВВВС.

3. Решите ребус: В + АААА + АААА + АААА = ВАААА.

4. Решите ребус: ПЧЁЛКА · 7 = ЖЖЖЖЖЖ.

5. Сумма двух натуральных чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получим второе число. Найдите эти числа.

6. Решите ребус: ОДИН + ОДИН = МНОГО.

7. Замените звёздочки десятью различными цифрами так, чтобы все три равенства были верными:  $* + * = **$ ,  $* + * = *$ ,  $* + * = *$ .

8. При каком наименьшем числе слагаемых имеет решение ребус  $СТУК + СТУК + \dots + СТУК = АААААА$ ?

## Блок 8. Ребусы

### Подготовительное занятие

- Замените звёздочки цифрами, чтобы равенства стали верными:

(а)  $5* + *84 = ***0$ ;

(б)  $** + * = **8$ ;

(в)  $6*5* - *8*4 = 2856$ .

- Решите ребусы:

(а) Б + БЕЕЕ = МУУУ;

(б) ДРАМА + ДРАМА = ТЕАТР;

(в) ЧАЙ : АЙ = 5.

Решить ребус — заменить буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным. При этом одинаковые буквы заменяются равными цифрами, а разные буквы — разными цифрами.

1. Сколькими способами можно заменить звёздочки цифрами, чтобы равенства стали верными:

(а)  $3*86 + *2*7 = 804*$ ;

(б)  $5927 + **45 + 78** = 1821*$

2. Решите ребус: АВА + ВАВ = ВВВС.

3. Решите ребус: В + АААА + АААА + АААА = ВАААА.

4. Решите ребус: ПЧЁЛКА · 7 = ЖЖЖЖЖЖ.

5. Сумма двух натуральных чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получим второе число. Найдите эти числа.

6. Решите ребус: ОДИН + ОДИН = МНОГО.

7. Замените звёздочки десятью различными цифрами так, чтобы все три равенства были верными:  $* + * = **$ ,  $* + * = *$ ,  $* + * = *$ .

8. При каком наименьшем числе слагаемых имеет решение ребус  $СТУК + СТУК + \dots + СТУК = АААААА$ ?

## Блок 8. Ребусы

### Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Математический или числовой ребус — это логическая головоломка, представляющая собой примеры простых арифметических действий, в которых часть или все цифры заменены на точки, звездочки, буквы или другие символы. Решить ребус — означает восстановить первоначальный вид математического равенства.

Разбирая вводные задания, полезно выделить несколько идей, за счёт которых удобно решать ребусы.

- ✓ Идея 1. Запишите пример в виде вычисления столбиком.
- ✓ Идея 2. Отслеживайте, когда происходит перенос разряда.
- ✓ Идея 3. Если в сумме больше разрядов, то можно понять, первые цифры слагаемых.
- ✓ Идея 4. Если достаточно перебрать разумное число вариантов, то надо перебирать.

*Вводные задания.* Предлагаем продемонстрировать ученикам эти идеи на примере решения вводных заданий. Можно предложить (1) найти ответы к первым трём ребусам (со звездочками), затем обсудить способы поиска их решений. Затем предложить (2) найти ответы ко второй тройке ребусов (с буквами), затем также обсудить способы поиска их решений.

- Замените звездочки цифрами, чтобы равенства стали верными:
  - (а)  $5* + *84 = ***0$ ;
  - (б)  $** + * = **8$ ;
  - (в)  $6*5* - *8*4 = 2856$ .

(а) Ответ:  $56 + 984 = 1040$ .

Решение. Запишем пример в виде сложения столбиком (идея 1) и начнём восстанавливать цифры.

$$\begin{array}{r} + \quad 5 * \\ * \quad 8 \quad 4 \\ \hline * * * 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 5 \quad 6 \\ * \quad 8 \quad 4 \\ \hline * * * 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 5 \quad 6 \\ * \quad 8 \quad 4 \\ \hline * * 4 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 5 \quad 6 \\ + \quad 9 \quad 8 \quad 4 \\ \hline * * 4 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 5 \quad 6 \\ + \quad 9 \quad 8 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \end{array}$$

- (1) Легко восстановить неизвестную цифру в разряде единиц.
- (2) Восстанавливаем неизвестную цифру в разряде десятков, не забывая (идея 2) перенос разряда из единиц в десятки.
- (3) Чтобы в сумме возник разряд тысяч, второе слагаемое в разряде сотен (идея 3) должно иметь цифру «9».

(б) Ответ:  $99 + 9 = 108$ .

Решение 1. Запишем пример в виде сложения столбиком (идея 1) и начнём восстанавливать цифры.

$$\begin{array}{r} + \quad * * \\ * * 8 \\ \hline * * 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 9 * \\ * * 8 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 9 \quad 9 \\ * * 8 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 8 \end{array}$$

В отличие от предыдущего случая, удобно восстановить (идея 3) первые цифры чисел: для возникновения разряда сотен, нужно поставить цифры 1, 0 и 9, как показано выше.

Из разряда единиц в разряд десятков должен быть переход (идея 2), поэтому сумма цифр в разряде единиц равна 18, то есть, это  $9 + 9$ .

Решение 2. Наибольшая сумма двузначного и однозначного слагаемых равна  $99 + 9 = 108$ . Наименьшая сумма вида  $**8$  равна 108. Значит, пример однозначно определяется:  $99 + 9 = 108$ .

Комментарий. Идея оценки разных частей равенства иногда помогает гораздо лучше, чем восстановление по цифрам.

(в) Ответ:  $6750 - 3894 = 2856$ .

Решение. Запишем пример в виде сложения столбиком (идея 1), а затем перепишем его как пример на сложение. Последовательное восстановление цифр показано ниже:

$$\begin{array}{r} - \quad 6 * 5 * \\ * \quad 8 * 4 \\ \hline 2 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 2 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \\ * \quad 8 * 4 \\ \hline 6 * 5 * \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 2 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \\ * \quad 8 * 4 \\ \hline 6 * 5 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 2 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \\ * \quad 8 \quad 9 \quad 4 \\ \hline 6 * 5 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 2 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \\ + \quad * \quad 8 \quad 9 \quad 4 \\ \hline 6 \quad 7 \quad 5 \quad 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} + \quad 2 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \\ + \quad 3 \quad 8 \quad 9 \quad 4 \\ \hline 6 \quad 7 \quad 5 \quad 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} - \quad 6 \quad 7 \quad 5 \quad 0 \\ - \quad 3 \quad 8 \quad 9 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \end{array}$$

Замечание. Можно рассуждать с примером на вычитание, каждый раз замечая, что занимается единица из более высокого разряда.

- В конце разбора вводных заданий стоит обратить внимание учеников, что
- (1) Если ребус имеет несколько решений, то нужно найти ВСЕ решения.
  - (2) Решить задачу с ребусом — ПОКАЗАТЬ, КАК восстановить цифры. Это докажет, что полученный ответ — единственный.

- Решите ребусы:  
(а) Б + БЕЕЕ = МУУУ;  
(б) ДРАМА + ДРАМА = ТЕАТР;  
(в) ЧАЙ : АЙ = 5.

Решить ребус — заменить буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным. При этом одинаковые буквы заменяются равными цифрами, а разные буквы — разными цифрами.

(а) Ответ.  $1 + 1999 = 2000$ .

Решение. (1) Цифра Б в разряде тысяч изменилась на М, значит,  $E = 9$ . (2) Тогда  $У = 0$ . Тогда (из разряда единиц)  $Б = 1$ , откуда  $М = 2$ .

Последовательность замен показана ниже:

$$\begin{array}{r}
 + \quad Б \quad Е \quad Е \quad Е \\
 \hline
 \quad \quad \quad Б \\
 \hline
 М \quad У \quad У \quad У
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 + \quad Б \quad 9 \quad 9 \quad 9 \\
 \hline
 \quad \quad \quad Б \\
 \hline
 М \quad У \quad У \quad У
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 + \quad Б \quad 9 \quad 9 \quad 9 \\
 \hline
 \quad \quad \quad Б \\
 \hline
 М \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 + \quad 1 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

(б) Ответ:  $18969 + 18969 = 37938$ .

Указание. Найдите букву, которую можно однозначно заменить цифрой.

Решение. (1) Сумма  $A + A$  в разряде сотен даёт А, в разряде единиц даёт Р. В разряде единиц нет переноса разряда. Значит,  $A + A$  в разряде сотен даёт А с переносом разряда. Перебором можно обнаружить, что такая цифра только одна:  $A = 9$ .

(2) Тогда определяется  $P = 8$ . Затем определяется  $E = 7$ .

(3) Сумма  $M + M$  должна давать перенос разряда. Значит,  $M = 5$  или  $M = 6$ . Так как  $M + M$  даёт ту же сумму, что  $D + D$ , то в первом случае  $D = 0$  (это невозможно), во втором —  $D = 1$ .

Последовательность замен показана ниже:

$$\begin{array}{r}
 + \quad Д \quad Р \quad А \quad М \quad А \\
 \hline
 \quad \quad \quad Д \quad Р \quad А \quad М \quad А \\
 \hline
 \quad \quad \quad Т \quad Е \quad А \quad Т \quad Р
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 + \quad Д \quad Р \quad 9 \quad М \quad 9 \\
 \hline
 \quad \quad \quad Д \quad Р \quad 9 \quad М \quad 9 \\
 \hline
 \quad \quad \quad Т \quad Е \quad 9 \quad Т \quad Р
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 + \quad Д \quad 8 \quad 9 \quad М \quad 9 \\
 \hline
 \quad \quad \quad Д \quad 8 \quad 9 \quad М \quad 9 \\
 \hline
 \quad \quad \quad Т \quad Е \quad 9 \quad Т \quad 8
 \end{array}$$

$$\Rightarrow
 \begin{array}{r}
 + \quad 1 \quad 8 \quad 9 \quad 6 \quad 9 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 1 \quad 8 \quad 9 \quad 6 \quad 9 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 3 \quad 7 \quad 9 \quad 3 \quad 8
 \end{array}$$

Получили единственный возможный вариант замены.

(в) Ответ:  $125 : 25 = 5$ ,  $250 : 50 = 5$ ,  $375 : 75 = 5$ .

Решение. Перепишем как пример на умножение:  $5 \cdot АЙ = ЧАЙ$ . Видно, что  $Й = 0$  или  $Й = 5$ . Далее можно действовать двумя способами.

(1) Перебор (идея 4). Для каждого случая ( $Й = 0$  или  $Й = 5$ ) можно выписать 9 вариантов, когда А равно от 1 до 9 и выбрать из них верные.

(2) Преобразования. Заметим, что  $5 \cdot АЙ = ЧАЙ = Ч00 + АЙ$ , откуда  $Ч00 = 4 \cdot АЙ$ . Так как АЙ — двузначное, то Ч равно 1, 2 или 3. Для каждого значения Ч находим значение ЧАЙ: 125, 250, 375.

Получаем три решения, указанные в ответе.

Комментарий. Обратите внимание учеников, что если в решении делается перебор, то его стоит представлять в решении задачи целиком. Иначе решение будет неполным.

*Основные задачи.* В решениях задач, в отличие от предыдущих, не будут представлены последовательности замен. Выпишите их со своими учениками самостоятельно.

- Сколькими способами можно заменить звездочки цифрами, чтобы равенства стали верными:  
(а)  $3*86 + *2*7 = 804*$ ;  
(б)  $5927 + **45 + 78** = 1821*?$

(а) Ответ: 1 вариант.

Указание. Однозначно восстанавливается пример  $3786 + 4257 = 8043$ .

(б) Ответ: 10 вариантов.

Указание. Из разряда десятков в разряд сотен в любом случае переносится 1. Тогда однозначно определяются недостающие цифры во всех разрядах, кроме разряда единиц:  $5927 + 4445 + 78** = 1821*$ . Вместо звездочки в разряде единиц слагаемого может быть любая цифра от 0 до 9. В каждом из этих вариантов есть одно решение. Итого 10 вариантов.

десятков переносится 1 или 2. В зависимости от этого есть 2 варианта неизвестной цифры в разряде десятков. В каждом случае остальные восстанавливаются однозначно.

- Решите ребус:  $АВА + ВАВ = ВВВС$ .

Ответ:  $919 + 191 = 1110$ .

Решение. Так как в сумме возник разряд тысяч, то  $В = 1$ . Так как  $A + В$  до давать перенос разряда, то  $A = 9$ . Отсюда следует, что  $С = 0$ .

- Решите ребус:  $В + АААА + АААА + АААА = ВАААА$ .

Ответ:  $2 + 9999 + 9999 + 9999 = 29999$ .

Решение. Получаем  $B + AAAAA + AAAAA = B0000$ . Так как в сумме возник новый разряд, то  $B = 1$  или  $B = 2$ .

Если  $B = 1$ , то  $1 + AAAAA + AAAAA = 10000$ . Такое невозможно, так как слева получается нечётное число, а справа — четное.

Если  $B = 2$ , то  $2 + AAAAA + AAAAA = 20000$ , откуда  $AAAAA = 19998 : 2 = 9999$ .

Получаем ответ.

4. Решите ребус: ПЧЁЛКА · 7 = ЖЖЖЖЖЖ.

Ответ:  $142857 \cdot 7 = 999\ 999$ .

Решение. Шестизначное число ЖЖЖЖЖЖ после деления на 7 остается шестизначным. Значит, оно начиналось с цифры 7, 8 или 9:

(1) если Ж = 7, то  $111111 \cdot 7 = 777\ 777$ ,

(2) если Ж = 8, то  $126984 \cdot 7 = 888\ 888$ ,

(3) если Ж = 9, то  $142857 \cdot 7 = 999\ 999$ .

Подходит только последний вариант, так как в первом варианте все цифры одинаковые, а во втором получается, что К и Ж равны 8.

5. Сумма двух натуральных чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получим второе число. Найдите эти числа.

Ответ:  $431 + 43 = 474$ .

Решение. Запишем условие как ребус:  $AB1 + AB = 474$  (но здесь возможно  $A = B$ ). Из разряда единиц видно, что  $B = 3$ . Получаем  $A31 + A3 = 474$ . Из разряда десятков видно, что  $A = 4$ .

6. Решите ребус: ОДИН + ОДИН = МНОГО.

Ответ:  $6823 + 6823 = 13646$ .

Решение. Так как при сложении возник новый разряд, то  $M = 1$ ,  $O + O$  не менее 9. Поэтому  $O$  равно 5, 6, 7, 8 или 9. Из разряда единиц следует, что  $O$  — чётная цифра. Значит,  $O = 6$  или  $O = 8$ .

Из разряда тысяч следует, что  $H$  равно 2, 3 (при  $O = 6$ ) или 6, 7 ( $O = 8$ ):

$6ДИ2 + 6ДИ2 = 126Г6$ ,  $6ДИ3 + 6ДИ3 = 136Г6$ ,

$8ДИ6 + 8ДИ6 = 168Г8$ ,  $8ДИ7 + 8ДИ7 = 178Г8$ .

В разряде единиц нет противоречий только в варианте  $6ДИ3 + 6ДИ3 = 136Г6$ .

Должно выполняться  $Д + Д = 16$ , значит,  $Д = 8$ .

Получаем:  $68И3 + 68И3 = 136Г6$ .

Должно выполняться  $И + И = Г$ , остались цифры 0, 2, 4, 5, 7, 9. Видно, что подходит только  $И = 2$ ,  $Г = 4$ .

7. Замените звёздочки десятью различными цифрами так, чтобы все три равенства были верными:  $* + * = **$ ,  $* + * = *$ ,  $* + * = *$ .

Ответ:  $4 + 6 = 10$ ,  $5 + 3 = 8$ ,  $2 + 7 = 9$  или  $7 + 3 = 10$ ,  $2 + 6 = 8$ ,  $4 + 5 = 9$ .

Решение. Цифра «0» может быть использована только второй в двузначной сумме. Цифра 9 — значение суммы, так как невозможно  $9 + 1 = 10$ .

Получаем:  $* + * = 10$ ,  $* + * = *$ ,  $* + * = 9$ .

Цифра 8 может быть либо слагаемым в первом примере, либо суммой во втором примере.

Случай 1. Если имеем  $8 + 2 = 10$ ,  $* + * = *$ ,  $* + * = 9$ , то остаются цифры 3, 4, 5, 6, 7. Вторым примером возможен только  $3 + 4 = 7$ , но  $5 + 6 \neq 9$ . Поэтому, в этом случае решения нет.

Случай 2. Если имеем  $* + * = 10$ ,  $* + * = 8$ ,  $* + * = 9$ , то остаются цифры 2, 3, 4, 5, 6, 7. Цифру 7 суммировали с 2 или 3. Рассмотрим оба подслучая:

Случай 2.1. Если имеем  $* + * = 10$ ,  $* + * = 8$ ,  $7 + 2 = 9$ , то остаются цифры 3, 4, 5, 6. Не трудно понять, что возможно только  $6 + 4 = 10$ ,  $3 + 5 = 8$ ,  $7 + 2 = 9$ .

Случай 2.1. Если имеем  $7 + 3 = 10$ ,  $* + * = 8$ ,  $* + * = 9$ , то остаются цифры 2, 4, 5, 6. Не трудно понять, что возможно только  $7 + 3 = 10$ ,  $2 + 6 = 8$ ,  $4 + 5 = 9$ .

8. При каком наименьшем числе слагаемых имеет решение ребус  $СТУК + СТУК + \dots + СТУК = AAAAAA$ ?

Ответ: 13.

Указание. Найти наименьшее число слагаемых — это означает, что нужно найти «хороший» пример и доказать, что меньшего числа слагаемых не может быть.

Решение. Пусть число слагаемых равно  $n$ . Есть пример при  $n = 13$ :  $AAAAAA = 111111$ ,  $СТУК = 111111 : 13 = 8547$ . Покажем, что нет примера с меньшим числом слагаемых.

Заметим, что  $AAAAAA \geq 111111$  и  $СТУК \leq 9876$ . Число слагаемых не менее  $111111 : 9876 > 11$ , то есть, как минимум 12. Почему невозможен пример с 12 слагаемыми?

Если  $n = 12$ , то  $AAAAAA$  — четное число. Тогда  $AAAAAA \geq 222222$ ,  $СТУК \leq 9876$ , а число слагаемых не менее  $222222 : 9876 > 22$ . Это больше 13.