Блок 7. Поверхности и объемы

Задания Интернет-карусели

1. Из двух одинаковых кубиков сложили параллелепипед. Сколько см³ составляет объем этого параллелепипеда, если площадь его поверхности равна 90 см²?

2. Петя вырезал развёртку куба, граница которой идёт по рёбрам куба. Ей площадь равна 216 см². Из неё Петя склеил куб. Сколько см³ составляет объем этого куба?

3. Петя вырезал развёртку куба, граница которой идёт по рёбрам куба. Её периметр равен 56 см. Из неё Петя склеил куб. Сколько см³ составляет объем этого куба?

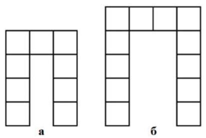
4. План дома — это квадрат 6 × 6, разбитый на комнаты размером 2 × 1. Между комнатами есть двери. Нашли такое N, что путь между любыми двумя комнатами проходит не более чем через *N* дверей». Какое наименьшее *N* могли найти?

5. Деревянный куб $N \times N \times N$ составили из кубиков 1 × 1 × 1. Затем его снаружи покрасили синей краской. Оказалось, что кубиков, у которых окрашено ровно две грани, на 52 больше, чем кубиков, у которых окрашены ровно три грани. Найдите *N*.

6. Два куба 3 × 3 × 3 состоят из кубиков 1 × 1 × 1 и расположены так, что у них есть ровно 8 общих кубиков 1 × 1 × 1. Из скольких кубиков состоит такая фигура?

7. Из Тюмени в Тобольск с интервалом 10 минут выехали со скоростью 30 км/ч два поезда. С какой скоростью двигался поезд из Тобольска, если он встретил эти поезда через 4 минуты один после другого? Ответ выразить в км/ч.

8. Мастер на все руки Иван собрал дверной проём из 9 кубиков (рисунок а) со стороной 50 см и покрасил его синей краской. Но потом понял, что не может пройти в проёме и пересобрал его: на этот раз взял 12 кубиков (рисунок б), каждый со стороной 60 см. Сколько грамм краски понадобится Ивану в этот раз (он красит весь проём кроме двух нижних граней), если на покраску первого проёма он потратил 985 грамм?



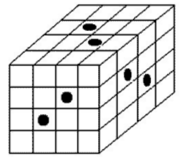
9. Два куба 3 × 3 × 3 состоят из кубиков 1 × 1 × 1 и расположены так, что у них есть ровно 8 общих кубиков 1 × 1 × 1. Из скольких квадратиков состоит поверхность такой фигуры?

10. Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составили квадрат со стороной N. Какое наименьшее возможное значение N?

11. Брусок 12 × 10 × 8 разрезали на части 2 × 1 × 1. Какова суммарная площадь разрезов?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2016-2017 учебный год

12. Большой кубик склеен из маленьких деревянных кубиков. В нем просверлили 6 сквозных отверстий, параллельных ребрам (рисунок справа). Сколько маленьких кубиков осталось не поврежденными?



13. Каждый из кубиков 1 × 1 × 1 окрашен в один из *N* цветов. Из них сложили куб 7 × 7 × 7 так, что любые два одноцветных кубика не имеют общих точек (даже угла). При каком наименьшем *N* такое возможно?

14. У Пети есть один куб 10 × 10 × 10 и много кубиков 2 × 2 × 2. Используя большой куб и *N* маленьких, он сложил еще один куб. При каком наименьшем *N* он мог это сделать?

15. Поверхность кубика 3 × 3 × 3 состоит из 54 клеток. Какое наибольшее количество клеток можно отметить так, чтобы отмеченные клетки не имели общих вершин?

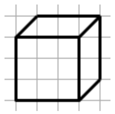
Блок 7. Поверхности и объемы

Задания интернет-карусели. Указания и решения

В данной подборке задач полезно рассматривать как арифметические решения, так и решения с помощью уравнения. При этом стоит отметить следующее.

✓ Среди задач есть задачи на максимум-минимум: № 4, № 10, № 13, № 14, № 15. В рамках соревнования от участников не требовалось доказательство минимальности (максимальности) результата — достаточно найти хороший пример. При разборе полезно уделить внимание способам доказательств в этих задачах.

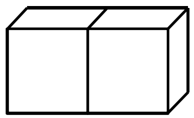
✓ К задачам полезно делать рисунки. Особенно для задач №6 и № 9, № 14. Напоминаем, удобно договориться с учениками, что они изображают кубик на листе клетчатой бумаги так, как показано на рисунке справа (передняя грань — квадрат размером 3 клетки на 3 клетки).



1. Из двух одинаковых кубиков сложили параллелепипед. Чему равен объем этого параллелепипеда, если площадь его поверхности равна 90 см^2?

   Ответ: 54.

   Решение. Поверхность куба состоит из 10 квадратов — граней кубиков. Значит, площадь одной грани равна 9 см^2. Значит, длина ребра кубика равна 3 см, объём одного кубика — 27 см^3, а двух кубиков — 54 см^3.

2. Петя вырезал развёртку куба, граница которой идёт по рёбрам куба. Ей площадь равна 216 см^2. Из неё Петя склеил куб. Сколько см^3 составляет объем этого куба?

   Ответ: 216.

   Решение. Любая развёртка куба состоит из 6 квадратов — граней куба. Значит, грань куба имеет площадь 216 : 6 = 36 см^2, то есть, это квадрат со стороной 6 см. Объем куба со ребром длиной 6 см равен 6^3 = 216 см^3.

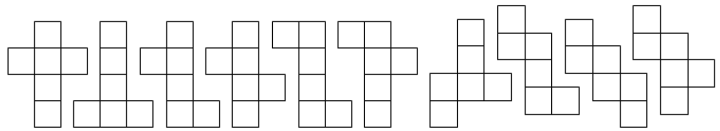
3. Петя вырезал развёртку куба, граница которой идёт по рёбрам куба. Её периметр равен 56 см. Из неё Петя склеил куб. Сколько см^3 составляет объем этого куба?

   Ответ: 64.

   Решение. Периметр любой развертки состоит из 14 отрезков, каждый из которых равен ребру куба. Значит, длина ребра куба равна 56 : 14 = 4 см. Объем такого куба равен 4^3 = 64 см^3.

   Комментарий 1. На самом деле, не так просто обосновать, почему все развёртки куба имеют одинаковый периметр. Например, можно перебрать все развертки, общее их количество невелико.

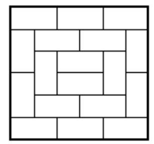
   Комментарий 2. Постарайтесь с ребятами нарисовать все возможные развёртки. На рисунке показаны все, кроме одной. Какой не хватает?

4. План дома — это квадрат 6 × 6, разбитый на комнаты размером 2 × 1. Между комнатами есть двери. Нашли такое *N*, что путь между любыми двумя комнатами проходит не более чем через *N* дверей». Какое наименьшее *N* могли найти?

   Ответ: 5.

   Решение. На рисунке справа показано разбиение на комнаты, при котором из любой комнаты в любую другую можно попасть, пройдя не более чем через 5 дверей.

   Покажем, что при любом разбиении будет две клетки, маршрут между которыми пройдёт через 5 (или более) дверей.

   Проходя из левого нижнего угла в правый верхний угол нужно «подняться» на 5 горизонталей и «сместиться вправо» на 5 вертикалей. Два подряд таких смещения не могут быть внутри одной комнаты. Значит, будет не менее 5 дверей.

5. Деревянный куб $N \times N \times N$ составили из кубиков 1 × 1 × 1. Затем его снаружи покрасили синей краской. Оказалось, что кубиков, у которых окрашено ровно две грани, на 52 больше, чем кубиков, у которых окрашены ровно три грани. Найдите *N*.

   Ответ: 7.

   Решение. Ровно 3 грани окрашены у кубиков, находящихся в углах куба. Таких 8 штук. Значит, ровно 2 грани окрашено у 52 + 8 = 60 кубиков.

   Такие кубики находятся на ребрах куба по $(N – 2)$ штуки. Всего рёбер 12. Значит, $N – 2 = 60 : 12$, откуда $N = 7$.

6. Два куба 3 × 3 × 3 состоят из кубиков 1 × 1 × 1 и расположены так, что у них есть ровно 8 общих кубиков 1 × 1 × 1. Из скольких кубиков состоит такая фигура?

   Ответ: 46.

   Решение. Один куб состоит из 3 × 3 × 3 = 27 кубиков; два куба — из 27 · 2 = 54 кубиков. Так как 8 кубиков общие, то всего 54 – 8 = 46 кубиков.

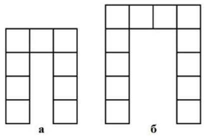
7. Из Тюмени в Тобольск с интервалом 10 минут выехали со скоростью 30 км/ч два поезда. С какой скоростью двигался поезд из Тобольска, если он встретил эти поезда через 4 минуты один после другого?

   Ответ: 45 км/ч.

   Решение. Расстояние между поездами, идущими из Тюмени, равно расстоянию, который каждый поезд проезжает за 10 минут, что равно 1/6 часа. Это равно $30 : 6 = 5$ км.

   Поезд из Тобольска в момент встречи с первым поездом в 10 км от второго, далее они за 4 минуты встречаются. Скорость сближения равна 5/4 км/мин = 75 км/ч. Скорость поезда из Тюмени равна 30 км/ч, значит, скорость поезда из Тобольска равна $75 - 30 = 45$ км/ч.

8. Мастер на все руки Иван собрал дверной проём из 9 кубиков (рисунок а) со стороной 50 см и покрасил его синей краской. Но потом понял, что не может пройти в проёме и пересобрал его: на этот раз взял 12 кубиков (рисунок б), каждый со стороной 60 см. Сколько грамм краски понадобится Ивану в этот раз (он красит весь проём кроме двух нижних граней), если на покраску первого проёма он потратил 985 грамм?



   Ответ: 1970.

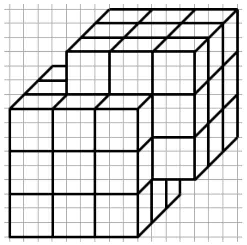
   Решение. Поверхность первого проёма состоит из $(38 - 2) = 36$ квадратиков 50×50; поверхность второго проёма состоит из 50 квадратиков 60×60. Площадь покраски увеличится в $(50 \cdot 60 \cdot 60) : (36 \cdot 50 \cdot 50) = 2$ раза. Значит, количество краски также увеличится в 2 раза. Итого: $985 \cdot 2 = 1970$ грамм.

9. Два куба $3 \times 3 \times 3$ состоят из кубиков $1 \times 1 \times 1$ и расположены так, что у них есть ровно 8 общих кубиков $1 \times 1 \times 1$. Из скольких квадратиков состоит поверхность такой фигуры?

   Ответ: 84.

   Решение. Поверхность один куба состоит из $6 \times 3 \times 3 = 54$ кубиков; двух кубов — из $54 \cdot 2 = 108$ кубиков. У каждого куба не видно на трёх гранях по 4 квадратика, всего — $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$. Значит, на поверхности куба $108 - 24 = 84$ квадратика.

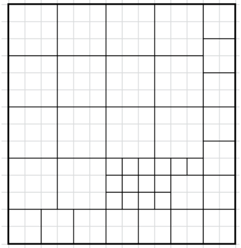
   Комментарий. Предложите ученикам нарисовать такую фигуру. Рисунок может выглядеть так, как показано справа.



10. Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составили квадрат со стороной n. Какое наименьшее возможное значение n?

    Ответ: 14.

    Решение. Докажем, что нельзя составить квадрат меньше, чем со стороной 14. Действительно, пусть искомый квадрат составлен из n квадратов каждого вида. Тогда его площадь равна $n \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = 14n = 2 \cdot 7 \cdot n$. Так как длина стороны искомого квадрата должна быть целой, то полученное число должно являться точным квадратом. Значит, число n должно содержать множители 2 и 7, то есть $n > 14$, поэтому и длина стороны искомого квадрата — также не меньше, чем 14.



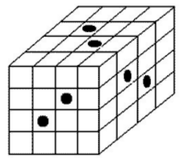
    Несложно привести пример такого разбиения. Один из них показан на рисунке справа.

11. Брусок $12 \times 10 \times 8$ разрезали на части $2 \times 1 \times 1$. Какова суммарная площадь разрезов?

    Ответ: 2104.

    Решение. Количество частей вдвое меньше числа кубиков $1 \times 1 \times 1$, то есть равно $(12 \cdot 10 \cdot 8) : 2 = 480$. Площадь поверхности одной части равна 10, площадь поверхности всего бруска — $2 \cdot (12 \cdot 10 + 10 \cdot 8 + 12 \cdot 8) = 592$. Площадь разрезов равна $(480 \cdot 10 - 592) : 2 = 2104$.

12. Большой куб склеен из маленьких деревянных кубиков. В нем просверлили 6 сквозных отверстий, параллельных ребрам (рисунок справа). Сколько маленьких кубиков осталось не поврежденными?



    Ответ: 44.

    Решение. Каждое отверстие повреждает 4 кубика, всего — $6 \cdot 4 = 24$. Но отверстия пересекаются по трое в одной точке. Значит, для два кубика повреждены 3 раза, остальные — по одному разу. Значит, поврежденных кубиков $24 - 4 = 20$. Объём куба $4 \times 4 \times 4$ равен 64 кубикам. Остались неповреждёнными $64 - 20 = 44$ кубика.

13. Каждый из кубиков $1 \times 1 \times 1$ окрашен в один из N цветов. Из них сложили куб $7 \times 7 \times 7$ так, что любые два одноцветных кубика не имеют общих точек (даже угла). При каком наименьшем N такое возможно?

    Ответ: 8.

Решение. Любые два из 8 кубиков блока $2 \times 2 \times 2$ должны быть разного цвета, так как все 8 кубиков имеют общий угол. Значит, необходимо не менее 8 цветов.

1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1

1, 3, 5, 7 слои

5	6	5	6	5	6	5
7	8	7	8	7	8	7
5	6	5	6	5	6	5
7	8	7	8	7	8	7
5	6	5	6	5	6	5
7	8	7	8	7	8	7
5	6	5	6	5	6	5

2, 4, 6 слои

Если кубики покрасить, как показано на рисунке, то никакие два одноцветных не будут иметь общих точек.

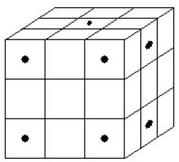
14. У Пети есть один куб $10 \times 10 \times 10$ и много кубиков $2 \times 2 \times 2$. Используя большой куб и N маленьких, он сложил еще один куб. При каком наименьшем N он мог это сделать?

Ответ: 91.

Решение. Можно получить куб с ребром не менее $10 + 2 = 12$. Такое возможно: к трём попарно соседним граням присоединить блоки 10×10 (в каждом 25 кубиков $2 \times 2 \times 2$). Останется заполнить три ребра по 5 кубиков и поставить один угловой. Всего $75 + 5 + 5 + 5 + 1 = 91$.

15. Поверхность куба $3 \times 3 \times 3$ состоит из 54 клеток. Какое наибольшее количество клеток можно отметить так, чтобы отмеченные клетки не имели общих вершин?

Ответ: 14.



Решение. Можно отметить 14 клеток, удовлетворяющие условию: на рисунке показано, как отметить 7 клеток на трёх смежных гранях куба, на трёх «невидимых» гранях нужно отметить семь клеток, симметричных этим.

Больше 14 клеток требуемым образом отметить невозможно. На поверхности куба 56 точек, являющихся вершинами клеток: 8 вершин самого куба, по две вершины на каждом из 12 рёбер и по 4 вершины на каждой из 6 граней. Отмеченные клетки не имеют общих вершин. Если бы их было более 14, то вершин было бы более $14 \cdot 4 = 56$. Значит, отмеченных клеток не более 14.