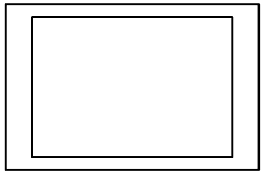
Блок 6. Площади и периметры

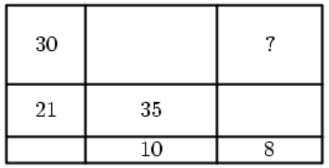
Задания интернет-карусели

1. Второклассник Виктор в качестве домашнего задания по математике должен был нарисовать прямоугольник. Ему нужно найти число A — его периметр (в сантиметрах). Затем надо нарисовать прямоугольник, у которого одна сторона та же, а другая на 5 см больше. Потом нужно найти число B — периметр второго прямоугольника (в сантиметрах). У Виктора число B оказалось вдвое больше числа A. Чему равно число A?

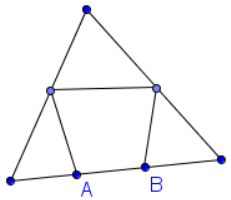
2. Первоклассник Петя измерил размеры рамки, показанной на рисунке, дырки, ширину вертикальных сторон и горизонтальных сторон. Оказалось, что стороны рамки равны 13 см и 21 см, периметр дырки — 50 см, а ширина вертикальных сторон вдвое больше ширины горизонтальных сторон. Найдите размеры дырки.

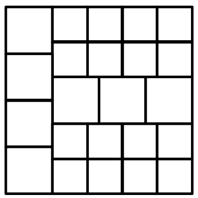


3. Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на девять прямоугольных частей. Площади некоторых из получившихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь верхней правой части.



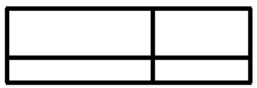
4. Треугольник, периметр которого равен 30 см, разделили на четыре части, как показано на рисунке. Периметры треугольных частей равны 13 см, 14 см и 15 см, периметр четырёхугольника равен 16 см. Какова длина отрезка AB?





5. Квадрат площади 1024 см² разбит на части — квадраты двух размеров, как показано на рисунке. Какова площадь меньшей части?

6. На рисунке можно найти 9 прямоугольников. У каждого из них длина и ширина — целые. Скольких из этих девяти прямоугольников площадь может быть равна нечётному числу?

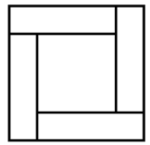


7. Одну сторону прямоугольника увеличили в 3 раза, а другую уменьшили в 2 раза. Получили квадрат. Сколько метров составляет сторона квадрата, если площадь прямоугольника 54 м²?

8. По итогам четверти директор дарит подарок каждому, у кого пятерки и по музыке, и по рисованию, а психолог — тем, у кого хотя бы одна двойка по этим предметам. В шестом классе учатся 20 человек. Учитель математики, зная только сумму всех сорока оценок — оценок всех учеников этого класса по обоим предметам, — понял, что кто-то из учеников останется без подарка. Какой могла быть эта сумма?

9. Периметр квадрата равен 8 см. Из восьми таких квадратов сложили прямоугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой. Сколько сантиметров составляет периметр полученного прямоугольника?

10. Из четырёх одинаковых прямоугольников и маленького квадрата сложили большой квадрат. Известно, что периметр одного прямоугольника равен 16 см. Сколько см² составляет площадь большого квадрата?



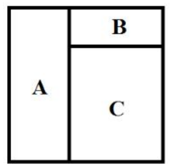
11. Площадь квадрата равна 121 см². Прямоугольник имеет периметр такой же, как у квадрата. Длина прямоугольника на 6 см больше его ширины. Какова площадь прямоугольника?

12. Маше нужно на границе квадрата отметить 16 различных точек. На всех сторонах должно быть разное число точек. Общее число точек на горизонтальных сторонах квадрата должно быть равно общему числу точек на вертикальных сторонах. Сколькими способами Маша может выполнить такое задание?

    Стороны квадрата считать различными. Варианты разные, на какой-то стороне в этих вариантах расположено разное число точек.

13. Два рыцаря и несколько лжецов встали в круг так, чтобы каждый из них мог произнести фразу «Оба моих соседа — лжецы». Сколько могло быть лжецов?

14. Витя составил из трёх прямоугольников квадрат с периметром 40 см. Периметр прямоугольника A равен 28 см, а площадь прямоугольника B равна 18 см². Сколько см² составляет площадь прямоугольника C?



15. Сейчас Петя старше Васи в 2 раза, а Лёша старше Пети на столько, на сколько Петя старше Васи. Через 30 лет сумма цифр в возрасте Лёши будет в 3 раза меньше возраста Пети. Сколько лет сейчас Васе? (Считаем, что описываемый возраст меньше 100 лет.)

Блок 6. Площади и периметры

Задания интернет-карусели. Указания и решения

В данной подборке задач полезно рассматривать как арифметические решения, так и решения с помощью уравнения. При этом стоит отметить следующее.

✓ Ученикам, еще не освоившим составление уравнений, полезно демонстрировать применение переменных. В некоторых задач без особых технических трудностей работают две переменные (например, см. указание к задаче № 1).

✓ Полезно и наоборот. Ученикам, привыкшим всё решать уравнениями, полезно понять способы рассуждений без уравнений.

1. Второклассник Виктор в качестве домашнего задания по математике должен был нарисовать прямоугольник. Ему нужно найти число A — его периметр (в сантиметрах). Затем надо нарисовать прямоугольник, у которого одна сторона та же, а другая на 5 см больше. Потом нужно найти число B — периметр второго прямоугольника (в сантиметрах). У Виктора число B оказалось вдвое больше числа A. Чему равно число A?

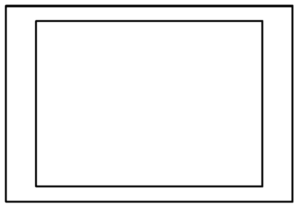
   Ответ: 10.

   Решение. Как изменился первоначальный прямоугольник? Две его стороны остались теми же, а две другие увеличились на 5 см каждая. Значит, периметр увеличился на $2 \cdot 5 = 10$ см. При этом он стал вдвое больше. Значит, он был равен $A = 10$ см, а стал $B = 20$ см.

   Указание. Полезно рассмотреть как арифметическое решение, так и решение с помощью уравнения, в котором удобно ввести сразу две переменные.

   Пусть размеры первого прямоугольника были a см и b см. Размеры нового прямоугольника $(a + 5)$ см и b см. Из условия $2 \cdot (2a + 2b) = 2(a + 5) + 2b$, откуда $A = 2a + 2b = 10$.

2. Первоклассник Петя измерил размеры рамки, показанной на рисунке, дырки, ширину вертикальных сторон и горизонтальных сторон.



Оказалось, что стороны рамки равны 13 см и 21 см, периметр дырки — 50 см, а ширина вертикальных сторон вдвое больше ширины горизонтальных сторон. Найдите размеры дырки.

   Ответ: 10×15.

   Решение. Пусть ширина горизонтальной стороны рамки составляет t см. Тогда длина рамки на $4t$ больше длины дырки, а высота рамки на $2t$ больше высоты дырки. Значит, периметр рамки на $2 \cdot (4t + 2t) = 12t$ больше периметра дырки.

   Периметр рамки равен $2 \cdot (13 + 21) = 68$. Значит, $12t = 68 - 50 = 18$, откуда $t = 1{,}5$.

   Тогда длины сторон дырки равны $21 - 4t = 15$ и $13 - 2t = 10$.

3. Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на девять прямоугольных частей.

30		?
21	35	
	10	8

Площади некоторых из получившихся частей указаны на рисунке.

Найдите площадь верхней правой части.

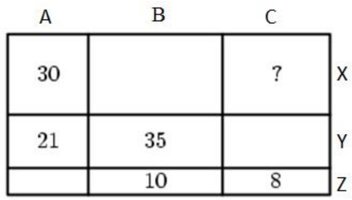
   Ответ. 40.

   Решение 1. Произведение площадей частей с площадями 30, 35 и 8 — это произведение шести отрезков: трёх, на которые делится горизонтальная сторона прямоугольника, и трёх, на которые делится вертикальная сторона прямоугольника.

   Заметим, что произведение площадей частей с площадями 21, 10 и искомой — произведение тех же шести отрезков.

   Значит, искомая площадь равна $(30 \cdot 35 \cdot 8) : (21 \cdot 10) = 40$.

   Замечание. Это обобщение способа решения задачи № 4 подготовительного занятия. Полезно понять решение именно в таком виде. Можно объяснить подробнее. Обозначим длины отрезков, как показано на рисунке.



Тогда AX = 30, BY = 35, CZ = 8, откуда ABCXYZ = 30 · 35 · 8.
С другой стороны, AY = 21, BZ = 8.
Получаем: 30 · 35 · 8 = AX · BY · CZ = AY · BZ · CX = 21 · 10 · CX.
Отсюда CX = (30 · 35 · 8) : (21 · 10) = 40.

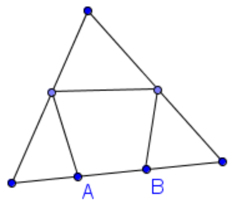
Комментарий. После разбора решения этой задачи можно предложить ученикам найти площади оставшихся трёх частей.

Решение 2. Результат решения задачи № 4 подготовительного занятия гласит следующее:

✓ Если прямоугольник двумя отрезками, параллельными его сторонам, поделили на четыре прямоугольника, то произведения площадей частей, находящихся в противоположных углах, равны.

Применим этот факт три раза. Площадь центральной части верхнего ряда равна $30 \cdot 35 : 21 = 50$; площадь средней части последнего столбца равна $8 \cdot 35 : 10 = 28$. Теперь можно найти искомую площадь: $50 \cdot 28 : 35 = 40$.

4. Треугольник, периметр которого равен 30 см, разделили на четыре части, как показано на рисунке. Периметры треугольных частей равны 13 см, 14 см и 15 см, периметр четырёхугольника равен 16 см. Какова длина отрезка AB?

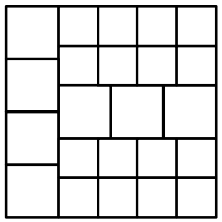


Ответ: 2 см.

Решение. Сумма периметров самого треугольника и четырёхугольной части составляет периметры трёх треугольных частей и дважды отрезок AB.
Отсюда следует, что $30 + 16 = 13 + 14 + 15 + 2AB$, откуда $AB = 2$.

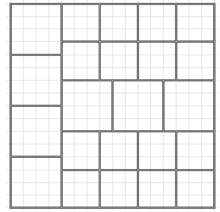
Замечание. Сравните с задачей № 5 подготовительного занятия.

5. Квадрат площади 1024 см² разбит на части — квадраты двух размеров, как показано на рисунке. Какова площадь меньшей части?



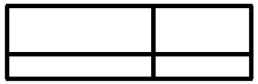
Ответ: 36.

Решение. Сравним левую и правую границы квадрата. Три стороны большого квадрата составляют столько же, сколько четыре стороны маленького. Значит, весь квадрат можно представить составленным из частей 3×3 и 4×4, как показано на рисунке.



Тогда данный квадрат 16×16 состоит из 256 клеток, площадь каждой равна $1024 : 256 = 4$ см². Значит, площадь части 3×3 равна $3 \cdot 3 \cdot 4$ см² $= 36$ см².

6. На рисунке можно найти 9 прямоугольников.



У каждого из них длина и ширина — целые. Скольких из этих девяти прямоугольников площадь может быть равна нечётному числу?

Ответ: 0, 4.

Решение. Площадь прямоугольника нечётна, если длины обеих его сторон нечётны. Есть три варианта для длины прямоугольника. Из них либо все чётны, либо ровно два нечётны [?]. То же для ширины.

Если хотя бы по одному из измерений прямоугольника все отрезки чётной длины, то и все площади будут чётными. Если же по обеим сторонам есть по два отрезка нечётной длины, то всего будет $2 \times 2 = 4$ нечётные площади.

Комментарий. Собственно, выше доказано, что может быть либо 0, либо 4 таких прямоугольников. Постройте примеры на каждый из случаев.

7. Одну сторону прямоугольника увеличили в 3 раза, а другую уменьшили в 2 раза. Получили квадрат. Сколько метров составляет сторона квадрата, если площадь прямоугольника 54 м²?

Ответ: 9.

Решение. Уменьшая сторону данного прямоугольника в два раза, площадь также уменьшаем в 2 раза, она будет равна $54 : 2 = 27$ м². Увеличивая другую сторону в три раза, площадь также становится больше в 3 раза, то есть станет равной $27 \cdot 3 = 81$ м². По условию получился квадрат, его сторона равна 9 м.

8. По итогам четверти директор дарит подарок каждому, у кого пятерки и по музыке, и по рисованию, а психолог — тем, у кого хотя бы одна двойка по этим предметам. В шестом классе учатся 20 человек. Учитель математики, зная только сумму всех со-

рока оценок — оценок всех учеников этого класса по обоим предметам, — понял, что кто-то из учеников останется без подарка. Какой могла быть эта сумма?

Ответ: 198, 199.

Указание. Что означает ответ «198 и 199»? Нужно доказать, два факта:

(1) если сумма 198 или 199, то кто-то оказался без подарка.

(2) если сумма не равна 198 или 199, то существует распределение баллов, при котором каждый ученик получает подарок,

Решение. (1) Если сумма 199, то все, кроме одного получили две пятёрки, а кто-то «4» и «5» — он останется без подарка. Если сумма 198, то «потеряно» два балла. Если у одного, то он всё равно не получил «2» и остался без подарка. Если двое потеряли по баллу, то они оба без подарков.

(2) Покажем ситуации, при которых каждый может получить подарок.

Если сумма 40 оценок от $2 \cdot 40 = 80$ до $2 \cdot 20 + 5 \cdot 20 = 140$, то может быть так, что каждый имеет одну двойку по одному из указанных предметов. Значит, при сумме от 80 до 140 каждый может иметь подарок.

При сумме от $(2 + 2) \cdot 10 + (5 + 5) \cdot 10 = 140$ до $(2 + 5) \cdot 10 + (5 + 5) \cdot 10 = 170$ может оказаться, что 10 учеников получили по две пятерки, остальные — по двойке. Тогда все получат подарки.

При сумме от $(2 + 2) \cdot 5 + (5 + 5) \cdot 15 = 170$ до $(2 + 5) \cdot 5 + (5 + 5) \cdot 15 = 185$ может оказаться, что 15 учеников получили по две пятерки, остальные — по двойке. Тогда все получат подарки.

При сумме от $(2 + 2) \cdot 3 + (5 + 5) \cdot 17 = 182$ до $(2 + 5) \cdot 3 + (5 + 5) \cdot 17 = 191$ может оказаться, что 17 учеников получили по две пятерки, остальные — по двойке. Тогда все получат подарки.

При сумме от $(2 + 2) \cdot 2 + (5 + 5) \cdot 18 = 188$ до $(2 + 5) \cdot 2 + (5 + 5) \cdot 18 = 194$ может оказаться, что 18 учеников получили по две пятерки, остальные — по двойке. Тогда все получат подарки.

При сумме от $(2 + 2) \cdot 1 + (5 + 5) \cdot 19 = 194$ до $(2 + 5) \cdot 1 + (5 + 5) \cdot 19 = 197$ может оказаться, что 18 учеников получили по две пятерки, остальные — по двойке. Тогда все получат подарки.

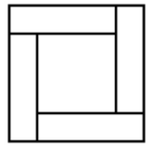
Если сумма равна 200, то стоят только пятёрки и все получили подарки.

9. Периметр квадрата равен 8 см. Из восьми таких квадратов сложили прямоугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой. Сколько сантиметров составляет периметр полученного прямоугольника?

Ответ: 24 см.

Решение. Сторона одного квадрата равна $8 : 4 = 2$ см, периметр прямоугольника состоит из 12 таких сторон, следовательно, его периметр $12 \cdot 2$ см $= 24$ см.

10. Из четырёх одинаковых прямоугольников и маленького квадрата сложили большой квадрат. Известно, что периметр одного прямоугольника равен 16 см. Сколько см² составляет площадь большого квадрата?



Ответ: 64.

Решение. Сторона большого квадрата состоит из двух смежных сторон прямоугольника — полупериметру, а значит, равна $16 : 2 = 8$ см. Следовательно, площадь большого квадрат равна $8 \cdot 8 = 64$.

11. Площадь квадрата равна 121 см². Прямоугольник имеет периметр такой же, как у квадрата. Длина прямоугольника на 6 см больше его ширины. Какова площадь прямоугольника?

Ответ. 112 см².

Решение. Сторона квадрата равна 11 см, периметр — 44 см. Сумма смежных сторон прямоугольника равна $44 : 2 = 22$ см. А раз одна сторона на 6 см больше другой стороны, то прямоугольник имеет размеры 8 см × 14 см. Его площадь равна 112 см².

12. Маше нужно на границе квадрата отметить 16 различных точек. На всех сторонах должно быть разное число точек. Общее число точек на горизонтальных сторонах квадрата должно быть равно общему числу точек на вертикальных сторонах. Сколькими способами Маша может выполнить такое задание?

Стороны квадрата считать различными. Варианты разные, на какой-то стороне в этих вариантах расположено разное число точек.

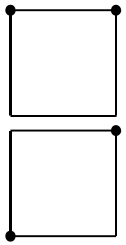
Ответ: 360.

Решение. Могут быть отмечены 0, 2 ил 4 вершины квадрата. Рассмотрим эти случаи отдельно.

(1) Пусть ни одна из вершин квадрата не отмечена. На одной паре противоположных сторон стоит 8 точек. Они могут быть распределены 0-8, 1-7, 2-6, 3-5 (по 2 способа на каждый вариант). Если вариант реализован на горизонтальных сторонах, то на паре вертикальных сторон другой реализован другой вариант. Всего $8 \cdot 6 = 48$ способов.

(2) Пусть отмечены все вершины квадрата. На одной паре противоположных сторон стоит 6 точек. Они могут быть распределены 0-6, 1-5, 2-4 (по 2 способа

на каждый вариант). Если вариант реализован на горизонтальных сторонах, то на паре вертикальных сторон другой реализован другой вариант. Всего $6 \cdot 4 = 24$ способов.



(3) Две вершины квадрата могут быть отмечены 6 способами: четыре случая, когда отмечены соседние вершины, два случая, когда отмечены противоположные.

На одной паре противоположных сторон стоит 7 точек. Они могут быть распределены 0-7, 1-6, 2-5, 3-4 (по 2 способа на каждый вариант). Если вариант реализован на горизонтальных сторонах, то на паре вертикальных сторон другой реализован другой вариант. Всего $6 \cdot 8 \cdot 6 = 6 \cdot 48 = 288$ способов.

Всего $48 + 24 + 288 = 360$ способов.

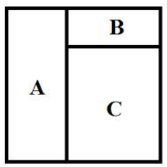
13. Два рыцаря и несколько лжецов встали в круг так, чтобы каждый из них мог произнести фразу «Оба моих соседа — лжецы». Сколько могло быть лжецов?

Ответ: 2, 3, 4.

Решение. Если лжецов нет или лжец один, то каждый из рыцарей солжёт. Если лжецов не менее 5, то три лжеца стоят подряд. Средний из этих трёх скажет правду.

Значит, лжецов 2, 3 или 4. На каждый из этих вариантов можно построить пример: –Р–Л–Р–Л–, –Р–Л–Л–Р–Л–, –Р–Л–Л–Р–Л–Л–.

14. Витя составил из трёх прямоугольников квадрат с периметром 40 см. Периметр прямоугольника A равен 28 см, а площадь прямоугольника B равна 18 см². Сколько см² составляет площадь прямоугольника C?



Ответ: 42.

Решение. Длина стороны квадрата равна $40 : 4 = 10$ см. Значит, одна сторона прямоугольника A равна 10 см, а другая равна $28 : 2 - 10 = 4$ см. Значит, одна из сторон прямоугольника B равна $10 - 4 = 6$ см, другая — $18 : 6 = 3$ см. Тогда одна сторона прямоугольника C равна 6 см, другая — $10 - 3 = 7$ см, а площадь равна $6 \cdot 7 = 42$ см².

15. Сейчас Петя старше Васи в 2 раза, а Лёша старше Пети на столько, на сколько Петя старше Васи. Через 30 лет сумма цифр в возрасте Лёши будет в 3 раза меньше возраста Пети. Сколько лет сейчас Васе? (Считаем, что описываемый возраст меньше 100 лет.)

Ответ: 3.

Решение. Из первого предложения следует, что если сейчас Васе n лет, то Пете $2n$ лет, Лёше $3n$ лет. Через 30 лет Лёше станет $3n + 30$ лет — это число кратно трём, поэтому его сумма цифр делится на 3. Возраст Пети будет в 3 раза больше суммы цифр, то есть будет делиться на 9.

Возраст Пети будет равен $2n + 30$. Это число делится на 9 и меньше 100, если n равно 3, 12, 21 или 30. В таблице посчитан возраст Лёши и Пети. Видно, что под условие «сумма цифр в возрасте Лёши в 3 раза меньше возраста Пети» подходит только $n = 3$.

n	3	12	21	30
Леша	39	66	93	120
Петя	36	54	72	90