


Блок 5. Текстовые задачи про возраст

Задания Интернет-карусели

1. Когда Маша шла в школу, она встретила Дядю Семёна, живущего в соседнем доме. Он её сказал: «Когда я проживу ещё половину, да треть, да четверть моих лет, мне станет 100 лет». Маша только к вечеру смогла сосчитать, сколько ему лет. Сколько лет Дяде Семёну?
2. Катя и Маша смотрели школьный спектакль. В нём было всего 5 героев. Про них было известно, что:
Алеша на 1 год младше Алексеева,
Боря на 2 года старше Борисова,
Вася на 3 года младше Васильева,
Гриша на 4 года старше Григорьева,
в спектакле есть Дима и Дмитриев.

На сколько лет Дмитриев старше Димы?
3. Жители деревень Котово и Кошкино спорят, какая из деревень старше. «Да нашей-то деревне через 50 лет будет вдвое больше лет, чем было 100 лет назад!» — говорят жители Котово. «А нашей деревне 20 лет назад было в полтора раза больше, чем 100 лет назад!» — отвечают жители Кошкино. Какова разность между возрастами деревень?
4. Когда Ване было столько лет, сколько сейчас его сестре Маше, он был в 5 раз её старше. Маше через 3 года будет вдвое меньше, чем будет Ване, когда Маше будет как Ване сейчас. Сколько сейчас лет Ване?
5. Кате 10 лет, а её кошке 3 года. Через сколько лет Катя будет в 2 раза старше своей кошки?
6. У Кати три подружки: Маша и еще две одноклассницы. Она любит их звать на обед домой. За месяц с каждой из них она обедала 9 раз, с каждым двумя из них — 4 раза, со всеми тремя — 1 раз, без каждого из них — 15 раз. Сколько раз Катя обедала одна?
7. Маша любит читать умные книжки. В одной из них Король сказал Королеве: «Сейчас мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам теперь. Когда же Вам будет столько лет, сколько мне теперь, нам вместе будет шестьдесят три года». Маша задумалась и поняла, сколько лет Королеве. А сколько лет Королю?

8. Маша считает возраст своего котёнка Макса в днях. Если сегодня к трети возраста Макса добавить 25 дней, то получится возраст котёнка ровно через неделю. Сколько дней Макс сегодня?
9. Маша и Катя лепят пельмени. Маша начала 2 часа назад, Катя — на час раньше. Маша через полчаса спит всего столько, сколько Катя спит через 20 минут. Когда Маша начала лепить, Катя уже слепила 108 штук. Сколько пельменей слепила Маша на данный момент?
10. Маша вырезала из картона много одинаковых фигурок, показанных справа. Она хотела составить из них прямоугольник. Так как из двух фигурок составить прямоугольник очень просто, она решила составлять прямоугольник из нечётного числа фигурок. Из какого наименьшего нечётного числа фигурок она может составить прямоугольник?

11. Отец старше Маши в 4 раза. Через 20 лет он будет старше Маши в 2 раза. Сколько сейчас лет Маше?
12. У Маши и Кати дома появились котята. Каждому сейчас меньше месяца. Возраст котят девочки измеряли в днях. В четверг котёнок Маши был в 4 раза старше котенка Кати, после этого в воскресенье машин котёнок был старше в полтора раза, а потом в субботу машин котёнок был старше на треть возраста котёнка Кати. В какой день недели родились каждый из котят?
13. Герман, сосед Маши, говорит, что в 2017 году ему исполнится столько лет, что его возраст будет равен сумме цифр его года рождения. А еще Герман рассказывал, что в 2012 году ждал Конца Света, но не дождался, а вместе этого ходил в поход. В каком году родился Герман?
14. У Кати есть три дяди, они — братья её мамы. Когда старшему брату было столько, сколько сейчас среднему, тогда младшему было 10 лет. Когда среднему брату будет столько, сколько сейчас старшему, тогда младшему будет 26 лет. Сколько лет каждому брату, если сумма лет старшего и среднего братьев в день рождения младшего брата была в 2 раза больше возраста младшего в настоящее время?
15. Учительница математики втрое старше своей ученицы Кати. Сумма их возрастов — 40 лет. Сколько будет Кате, когда она станет младше учительницы вдвое?

Блок 5. Текстовые задачи про возраст

Задания Интернет-карусели. Указания и решения

При разборе задач стоит обратить внимание на следующее.

✓ В сложных задачах важно разобраться в условии, то есть составить «математическую модель». Это удобно делать в виде таблицы. Порой удобно переписывать таблицу в иных обозначениях. Примеры этого можно найти в решениях приведенных задач.

✓ Можно вводить несколько «букв» (переменных), постепенно заменяя всё одной. В итоге получается не система уравнений с несколькими переменными, а всего лишь линейное уравнение с одной переменной. Примеры этого также найдите в решениях задач.

Несложные задачи про возраст: № 5, № 8, № 11 и № 15. Задачи, при решении которых стоит составлять таблицы: № 4, № 7, № 14. Заметьте, при решении сложных задач № 3 делаются выводы, похожие на решение задачи № 5 и № 15.

Задачи на иные темы: № 1 и № 2 (сформулированы про возраст, но не рассматривают особенности), № 6 (круги Эйлера), № 9, № 10. В задачах № 12 и № 13 полезно сначала подобрать, как такое возможно, а затем объяснить отсутствие иного решения.

1. Когда Маша шла в школу, она встретила Дядю Семёна, живущего в соседнем доме. Он её сказал: «Когда я проживу ещё половину, да треть, да четверть моих лет, мне станет 100 лет». Маша только к вечеру смогла сосчитать, сколько ему лет. Сколько лет Дяде Семёну?

Ответ: 48.

Решение. Возраст Дяди Семёна делится на 2, 3 и 4. Удобно взять этот возраст за $12n$. Тогда $12n + 12n/2 + 12n/3 + 12n/4 = 12n + 6n + 4n + 3n = 25n = 100$, откуда $n = 4$. Значит, Дяде Семёну $12n = 48$ лет.

2. Катя и Маша смотрели школьный спектакль. В нём было всего 5 героев. Про них было известно, что:
Алеша на 1 год младше Алексеева,
Боря на 2 года старше Борисова,
Вася на 3 года младше Васильева,
Гриша на 4 года старше Григорьева,
в спектакле есть Дима и Дмитриев.

На сколько лет Дмитриев старше Димы?

Ответ: 2.

Решение. Сумма возрастов Алеши, Бори, Васи, Гриши и Димы равна сумме возрастов Алексеева, Борисова, Васильева, Григорьева и Дмитриева. Пусть эта сумма равна N . Тогда « N без Димы» на $-1 + 2 - 3 + 4 = 2$ года больше « N без Дмитриева». Значит, Дмитриев старше Димы на 2 года.

3. Жители деревень Котово и Кошкино спорят, какая из деревень старше. «Да нашей-то деревне через 50 лет будет вдвое больше лет, чем было 100 лет назад!» — говорят жители Котово. «А нашей деревне 20 лет назад было в полтора раза больше, чем 100 лет назад!» — отвечают жители Кошкино. Какова разность между возрастами деревень?

Ответ: 10.

Решение. Из фразы про Котово следует, что $100 + 50 = 150$ лет — это и есть возраст деревни 100 лет назад. Значит, сейчас Котово $150 + 100 = 250$ лет.

Из фразы про Кошкино следует, что $100 - 20 = 80$ лет — это треть от возраста деревни 20 лет назад. Значит, Кошкино сейчас $80 \cdot 3 + 20 = 260$ лет.

Значит, Кошкино на $260 - 250 = 10$ лет старше, чем Котово.

Комментарий. Данные выводы похожи на задачи типа № 5 данной карусели. Рекомендуем разобраться сначала с решением той задачи.

4. Когда Ване было столько лет, сколько сейчас его сестре Маше, он был в 5 раз её старше. Маше через 3 года будет вдвое меньше, чем будет Ване, когда Маше будет как Ване сейчас. Сколько сейчас лет Ване?

Ответ: 18.

Указание. Удобно составить таблицу, сколько кому было лет в разные моменты времени, описанные в условии.

Решение. Первое предложение условия говорит о том, что когда-то Маше было n лет, Ване — $5n$ лет, а сейчас Маше уже $5n$ лет. Маша стала старше на $4n$ лет, значит, сейчас Ване $5n + 4n = 9n$ лет.

Во втором предложении говорится про момент, когда Маше будет $9n$ лет (как Сане сейчас), она станет старше на $9n - 5n = 4n$ лет. Тогда самому Ване будет $9n + 4n = 13n$ лет.

Результат можно записать в таблице:

	Сейчас	Было	Станет
Маша	$5n$	n	$9n$
Ваня	$9n$	$5n$	$13n$

Через 3 года Маше будет $(5n + 3)$ лет, что в 2 раза меньше, чем $13n$. Из уравнения $13n = 2(5n + 3)$ получаем $n = 2$.

5. Кате 10 лет, а её кошке 3 года. Через сколько лет Катя будет в 2 раза старше своей кошки?

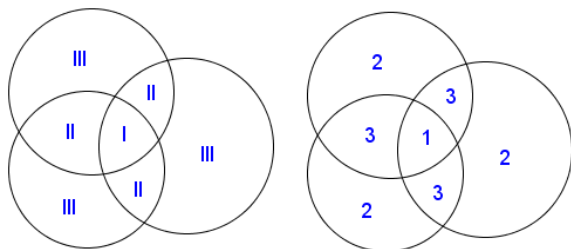
Ответ: 4.

Решение. Разность возраста Кати и кошки всегда равна $10 - 3 = 7$ лет. Когда Катя будет вдвое старше, её возраст будет состоять из двух равных частей: возраста кошки и разности. Значит, ей будет $2 \cdot 7 = 14$ лет, что произойдёт через $14 - 10 = 4$ года.

6. У Кати три подружки: Маша и еще две одноклассницы. Она любит их звать на обед домой. За месяц с каждой из них она обедала 9 раз, с каждыми двумя из них — 4 раза, со всеми тремя — 1 раз, без каждого из них — 15 раз. Сколько раз Катя обедала одна?

Указание. Это задача на круги Эйлера.

Решение. Нарисуем три круга, соответствующих каждой из подружек Кати (левый рисунок). В пересечении (в части I) число 1, так как «со всеми тремя — 1 раз». С каждыми двумя, но без третьей (части II) — по $4 - 1 = 3$ раза. С каждой из подружек без остальных (части III) — по $9 - 3 - 3 - 1 = 2$ раза. Получили результат, показанный на правом рисунке.



Получаем, что Катя обедала без Маши вообще 15 раз, но при этом с кем-то еще $2 + 3 + 2 = 7$ раз. Значит, Катя обедала один раз $15 - 7 = 8$ раз.

7. Маша любит читать умные книжки. В одной из них Король сказал Королеве: «Сейчас мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам теперь. Когда же Вам будет столько лет, сколько мне теперь, нам вместе будет шестьдесят три года». Маша задумалась и поняла, сколько лет Королеве. А сколько лет Королю?

Ответ: 28.

Решение. Внесём в таблицу то, что дано в задаче. Из первого условия заполним первую и вторую строки таблицы 1.

	Король	Королева		Король	Королева		Король	Королева
Сейчас	$2n$	m	Сейчас	$4t$	$3t$	Сейчас	$4t$	$3t$
Раньше	m	n	Раньше	$3t$	$2t$	Раньше	$3t$	$2t$
Будет			Будет			Будет	$63 - 4t$	$4t$

Заметим, что от возраста n лет до m лет прошло столько же, как от m лет до $2n$ лет. Значит, m по середине между n и $2n$. Значит, их можно заменить на $n = 2t$, $m = 3t$, $2n = 4t$. Результат в таблице 2.

Из второго условия можно заполнить строчку 3 (см. таблицу 3). Между первой и третьей строкой во втором столбце прошло t лет, а в первом столбце прошло $63 - 4t - 4t$ лет. Из соотношения $t = 63 - 4t - 4t$ получаем $t = 7$.

Значит, Королю сейчас $4t = 28$ лет.

8. Маша считает возраст своего котёнка Макса в днях. Если сегодня к трети возраста Макса добавить 25 дней, то получится возраст котёнка ровно через неделю. Сколько дней Макс сегодня?

Ответ: 27.

Решение (арифметика). Из условия следует, что $2/3$ возраста — это $25 - 7 = 18$ дней. Значит, треть возраста — 9 дней, весь возраст — 27 дней.

Решение (уравнение). Если сейчас Макс $3n$ дней, то $3n + 7 = n + 25$, откуда $n = 9$. Значит, Макс $3n = 27$ дней.

9. Маша и Катя лепят пельмени. Маша начала 2 часа назад, Катя — на час раньше. Маша через полчаса спит всего столько, сколько Катя спит через 20 минут. Когда Маша начала лепить, Катя уже слепила 108 штук. Сколько пельменей слепила Маша на данный момент?

Ответ: 288.

Указание. К данному моменту Маша лепит пельмени 120 минут, а Катя 180 минут. Маша за 150 минут делает столько, сколько Катя за 200 минут. Значит, Маша за 3 минуты делает как Катя за 4 минуты. Катя за 60 минут делает 108 штук, значит, Маша 108 штук делает за 45 минут или 36 штук за 15 минут. За 120 минут Маша сделала $36 \cdot 8 = 288$ штук.

10. Маша вырезала из картона много одинаковых фигурок, показанных справа. Она хотела составить из них прямоугольник. Так как из двух фигурок составить прямоугольник очень просто, она решила составлять прямоугольник из нечётного числа фигурок. Из какого наименьшего нечётного

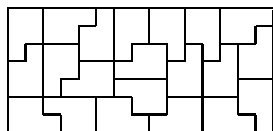


числа фигурок она может составить прямоугольник?

Ответ: 35.

Замечание. Предложите ученикам найти любой пример прямоугольника из нечётного числа данных фигурок.

Решение. Пример: доску 15×7 можно разбить на указанные фигурки так:



Перебором нетрудно понять, что сторона прямоугольника не может быть равна 3. Общее число клеток доски кратно 5, значит, одна из сторон кратна 5.

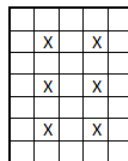
Меньшее число клеток содержат доски $5 \times k$ при чётных значениях k , меньших 20. Перебором, правда, более долгим, можно показать, что нельзя собрать блок $5 \times k$ при чётных значениях k .

Если сторона, кратная 5, не менее 15, то другая сторона меньше 7, то есть 3 или 5. Это рассмотрено ранее.

Комментарий 1. Эта задача очень сложная. В рамках Интернет-карусели от участников не требовалось строгое доказательство минимальности. Планировалось, что команды найдут какие-то нетривиальные примеры (что само не просто) и выберут меньший из них.

Комментарий 2. Доказать, что нельзя собрать блок $5 \times k$ при чётных значениях k , можно следующим образом.

Пусть $k = 2m + 1$. Отметим $2m$ клеток, как показано на рисунке справа. Заметим, что каждая фигурка занимает одну или две отмеченные клетки. Значит, если доску разбили на головоустики, то их не более $2m$. Но такое количество головоустиков занимает не более $2m \cdot 5 = 10m$ клеток, а их на доске $5(2m + 1) = 10m + 5$ штук, что более чем $10m$. Противоречие.



Источник задачи: турнир «Kostroma Open» (6-7 класс, январь 2016 года).

11. Отец старше Маши в 4 раза. Через 20 лет он будет старше Маши в 2 раза. Сколько сейчас лет Маше?

Ответ: 10 лет.

Решение. Пусть Маше сейчас n лет, а её папе $4n$ лет. Через 20 лет Маше будет $n + 20$ лет, папе — $(4n + 20)$ лет. Значит, $2(n + 20) = 4n + 20$, откуда $n = 10$.

12. У Маши и Кати дома появились котята. Каждому сейчас меньше месяца. Возраст котят девочки измеряли в днях. В четверг котёнок Маши был в 4 раза старше котенка Кати, после этого в воскресенье машин котёнок был старше в полтора раза, а потом в субботу машин котёнок был старше на треть возраста котёнка Кати. В какой день недели родились каждый из котят?

Ответ: котёнок Маши родился в среду, а котёнок Кати — в следующий вторник.

Решение. Пусть в четверг котёнку Маши было $4d$ дней, а котенку Кати было d дней, разность в возрасте равна $3d$. В воскресенье эта разность была вдвое меньше возраста котёнка Кати, значит, её котёнку было $9d$ дней, а котёнку Кати было $6d$ дней. Значит, с четверга по воскресенье прошло $9d - 4d = 5d$ дней.

Это не могло быть ближайшее воскресенье, до него только 3 дня. Следующее могло быть, до него 10 дней. При этом $d = 2$, в четверг котят было 8 дней и 2 дня. Откуда следует, что котёнок Маши родился в среду, а котёнок Кати — в следующий вторник. Пример показан в таблице справа.

Заметим, при этом указанная суббота приходится минимум на 25 число месяца. Если бы указанное воскресенье было позднее, то указанное в задаче было дольше месяца, что противоречит условию.

13. Герман, сосед Маши, говорит, что в 2017 году ему исполнится столько лет, что его возраст будет равен сумме цифр его года рождения. А еще Герман рассказывал, что в 2012 году ждал Конца Света, но не дождался, а вместе этого ходил в поход. В каком году родился Герман?

Ответ: 1994.

Решение. Дима не мог родиться раньше 1989 года, иначе ему будет не менее 28 лет, а все года не позднее 1989 года имеют сумму цифр не более 27.

С другой стороны, из условия следует, что Герман родился ранее 2012 года.

Промежуток между 1990 и 2011 годом можно перебрать. Расчёты показаны в таблице.

	Маша	Катя
ср	ДР	
чт	1	
пт	2	
сб	3	
вс	4	
пн	5	
вт	6	ДР
ср	7	1
чт	8	2
пт	9	3
сб	10	4
вс	11	5
пн	12	6
вт	13	7
ср	14	8
чт	15	9
пт	16	10
сб	17	11
вс	18	12
пн	19	13
вт	20	14
ср	21	15
чт	22	16
пт	23	17
сб	24	18
вс	25	19

Год	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999		
Сумма цифр	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28		
Возраст	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18		
Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Сумма цифр	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	3	4
Возраст	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6

Возраст совпадает с суммой цифр только в 1994 году.

14. У Кати есть три дяди, они — братья её мамы. Когда старшему брату было столько, сколько сейчас среднему, тогда младшему было 10 лет. Когда среднему брату будет столько, сколько сейчас старшему, тогда младшему будет 26 лет. Сколько лет каждому брату, если сумма лет старшего и среднего братьев в день рождения младшего брата была в 2 раза больше возраста младшего в настоящее время?

Ответ: 18, 32, 40.

Решение. Из условия можно заполнить таблицу следующим образом:

	Старший	Средний	Младший
Сейчас	m	n	
Было	n		10
Станет		m	26
ДР мл.	$n-10$	$m-26$	0

Разности лет между первой строкой и последней для старшего и среднего братьев равны, то есть $m - (n - 10) = n - m + 26$, откуда $m = n + 8$.

Перепишем таблицу, заменив везде m , заметим, что разность между первой и последней строкой равна 18 лет, заполним другие ячейки:

	Старший	Средний	Младший
Сейчас	$n+8$	n	$n-14=18$
Было	n		10
Станет		$n+8$	26
ДР мл.	$n-10$	$n-18$	0

Значит, $n = 14 + 18 = 32$, откуда можно узнать возраст остальных братьев.

15. Учительница математики втрое старше своей ученицы Кати. Сумма их возрастов — 40 лет. Сколько будет Кате, когда она станет младше учительницы вдвое?

Ответ: 20.

Решение. Сейчас Кате $3n$ лет, учительнице n лет. Тогда $3n + n = 40$, $n = 10$, то есть Кате 10 лет, учительнице 30 лет.

Когда Кате будет m лет, а учительнице $2m$ лет, то по-прежнему разность возраста будет $30 - 10 = 20$ лет, то есть $2m - m = m = 20$. Значит, Кате будет 20 лет.