Блок 4. Круги Эйлера

Задания Интернет-карусели

1. В 5 «У» классе 27 учеников. Каждый ходит в кружок по рисованию или в кружок по пению. Пением занимаются 19 школьников, пятеро и поют, и рисуют. Сколько ребят из 5 «У» класса занимаются в кружке рисования?
2. Напишите наименьшее пятизначное число, сумма цифр которого равна 28.
3. На большой совместный концерт певиц Маши и Даши пришли только их фанаты. Каждый четвёртый фанат Маши является также фанатом Даши. Каждый пятый фанат Даши является также фанатом Маши. Во сколько раз фанатов Маши меньше общего числа пришедших на концерт зрителей?
4. У Вани есть 24 карточки. На каждой стороне карточки написана синяя или красная буква. Синих букв в 2 раза больше, чем красных. На 12 карточках буквы разного цвета. Сколько карточек с двумя красными буквами?
5. Прошла олимпиада по математике, русскому языку и литературе. По математике все задачи решили 32 человека, по русскому языку — 20, по литературе — 26. Каждый решил все задачи хотя бы по одному из предметов. Победителем становится участник, решивший все задачи по всем трём предметам. Какое наибольшее число пятиклассников могло принимать участие в олимпиаде, если победителей оказалось 18?
6. Сколько четырёхзначных чисел, в записи которых встречается сочетание цифр «12»?
7. На субботнем кружке по математике 6 учеников запускали самолётики, 4 играли в морской бой, остальные решали задачи. Только Игорёк успевал запускать самолётики, пока Витя пытался подбить его корабли. Сколько ребят были заняты решением задач, если на кружок пришли 15 человек?
8. По дороге от Анино до Генино встречаются Бенино и Венино. Коля шёл пешком из Бенино в Анино, а Вася ехал из Венино в Генино на велосипеде вдвое быстрее, нежели Коля идёт пешком. Оба вышли в 8:00 и закончили свой путь в 10:00. Коля в 8:20 встретил Васю в 2 км от Бенино. Сколько км составляет расстояние от Анино до Генино?
9. Мише продиктовали пять различных чисел: одно четырёхзначное и четыре двузначных. Он записал их подряд, получив 341215341315. Какое четырёхзначное число продиктовали Мише?

10. Дана полоска из 4 клеток. Каждую можно покрасить в красный, желтый или зеленый цвет. Сколькими способами это можно сделать, чтоб любые три подряд идущие клетки были всех трёх цветов?
11. В группе 15 человек знают английский язык, 16 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 21 человек знает польский язык. В группе нет людей, знающих три языка, и 23 человека в группе знают ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе знают ровно один язык из перечисленных?
12. В первом классе учатся 35 ребят. Некоторые из них знают все буквы, кроме «П», которую просто пропускают при письме. Остальные знают все буквы, кроме «Л», которую так же пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «ПОВ», 18 других учеников — слово «ЛОВ», а остальных — слово «ПЛОВ». При этом слова «ПОВ» и «ЛОВ» оказались написанными по 12 раз. Сколько ребят написали своё слово верно?
13. В четырёх ящиках спрятали 3 шарика. Ящики стоят в ряд и на них висят таблички: «0», «0», «1» и «1». Ни одна надпись не соответствует числу шариков, лежащих в ящике. Сколько шариков лежит в последнем ящике?
14. Имеется ряд кнопок. Они разбиты на три группы: по 7, 3 и 3 кнопки. Любые две кнопки из одной группы не являются соседями. Если нажаты все кнопки одной группы, то лампочка загорается (независимо от того, есть лишние нажатия или нет). Какое наименьшее число кнопок нужно нажать, чтобы лампочка загорелась?
15. В классе 32 ученика. Известно, что на плавание ходят в 3 раза больше человек, чем на теннис, и в 6 раз больше, чем на плавание и теннис вместе. Сколько детей не ходит ни на плавание, ни на теннис, если их не больше 10?
16. В деревне Отличнино в воскресенье домашнее задание по математике делали 100 человек, по русскому языку — 50, по физике — 48. По другим предметам домашнего задания не было. Ровно по двум предметам домашнее задание делали вдвое меньше учеников, чем тех, кто только по одному, а по всем трём — втрое меньше, чем только по одному. Сколько учеников делали домашнее задание в воскресенье?

Блок 4. Круги Эйлера

Задания Интернет-карусели. Указания и решения

Предлагаем самостоятельно проиллюстрировать ученикам приведенные решения картинками с кругами Эйлера. Ситуации для двух множеств в задачах № 1, № 3, № 4, № 7, № 15. Ситуации для трёх множеств в задачах № 5. Задача № 11 предлагает рассуждать с четырьмя множествами.

При решении этих задач можно строить разные рассуждения, а можно стараться сводить к формуле включения-исключения:

✓ для двух множеств общее число элементов равно $M_1 + M_2 - M_{12}$, где M_1 — число элементов первого множества, M_2 — число элементов второго множества, M_{12} — число элементов, входящих и в первое, и во второе множество;

✓ в аналогичных обозначениях общее число элементов трёх множеств равно $M_1 + M_2 + M_3 - M_{12} - M_{23} - M_{31} + M_{123}$.

Заметим, что рассуждения по формуле включения-исключения присутствуют в решениях задач № 6 по комбинаторике и задаче на движение № 8.

Также включены задачи на другие темы: № 2, № 9, № 12, № 14.

1. В 5 «У» классе 27 учеников. Каждый ходит в кружок по рисованию или в кружок по пению. Пением занимаются 19 школьников, пятеро и поют, и рисуют. Сколько ребят из 5 «У» класса занимаются в кружке рисования?

   Ответ: 13.

   Решение. Число учеников, которые поют, но не рисуют, равно $19 - 5 = 14$. Остальные $27 - 14 = 13$ учеников рисуют.

2. Напишите наименьшее пятизначное число, сумма цифр которого равна 28.

   Ответ: 10999.

   Решение. Первые две цифры — наименьшие из возможных, остальные обязаны быть девятками.

3. На большой совместный концерт певиц Маши и Даши пришли только их фанаты. Каждый четвёртый фанат Маши является также фанатом Даши. Каждый пятый фанат Даши является также фанатом Маши. Во сколько раз фанатов Маши меньше общего числа пришедших на концерт зрителей?

   Ответ: 2.

   Решение. Пусть на концерте было n фанатов обеих певиц. Это четверть фанатов Маши, которых $4n$ человек. Также n — пятая часть фанатов Даши, то есть из $5n$. Всего, исходя из формулы включения-исключения, $4n + 5n - n = 8n$. Значит, фанатов Маши в $(8n) : (4n) = 8 : 4 = 2$ раза меньше общего числа зрителей.

   Комментарий 1. В обозначениях формулы включения-исключения (см. выше) в данной задаче если $M_{12} = n$, то $M_1 = 4n$, $M_2 = 5n$, всего $M_1 + M_2 - M_{12} = 8n$. Нужно найти $M_{12} : M_1 = 2$.

   Комментарий 2. Полезно вспомнить с учениками следующую задачу, входящую во многие олимпиадные сборники.

   - Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

   Ответ: философов больше.

   Как и в задаче карусели, удобно рассмотреть число людей, относящихся к обоим указанным множествам (математиков и философов).

   Решение. Обозначим через n число людей, являющихся математиками и философами одновременно. Тогда число математиков равно $7n$, а число философов — $9n$, что больше, нежели $7n$.

4. У Вани есть 24 карточки. На каждой стороне карточки написана синяя или красная буква. Синих букв в 2 раза больше, чем красных. На 12 карточках буквы разного цвета. Сколько карточек с двумя красными буквами?

   Ответ: 2.

   Решение. Всего на карточках $24 \cdot 2 = 48$ букв. Красных — треть от общего числа, то есть 16. На 12 карточек с буквами разного цвета уйдёт 12 красных букв. Остальные $16 - 12 = 4$ буквы написаны на $4 : 2 = 2$ карточках.

   Замечание. Судя по большому числу неверных ответов «4» участники забывали сделать последнее действие.

5. Прошла олимпиада по математике, русскому языку и литературе. По математике все задачи решили 32 человека, по русскому языку — 20, по литературе — 26. Каждый решил все задачи хотя бы по одному из предметов. Победителем становится участник, решивший все задачи по всем трём предметам. Какое наибольшее число пятиклассников могло принимать участие в олимпиаде, если победителей оказалось 18?

   Ответ. 42.

   Решение. По условию 18 пятиклассников решили задачи по всем трём предметам. Среди ребят, не ставших победителями, $32 - 18 = 14$ ребят решили все задачи по математике, 20 – 18 = 2 ребят, решивших все задачи по русскому языку, и 26 – 18 = 8 ребят, решивших все задачи по литературе. Если эти группы не пересекаются, что было 18 + 14 + 2 + 8 = 42. Если пересекаются, то меньше, так как если участник показал результат по двум предметам, то его надо вычесть из общего числа 42.

Комментарий 1. Пояснить последнее предложение решения проще общей формулой включения-исключения для трёх множеств. Здесь $M_1 = 32$, $M_2 = 20$, $M_3 = 26$, $M_{123} = 18$. Про числа M_{12}, M_{23}, M_{31} не ясно, но все три числа не менее 18. Общее число равно $M_1 + M_2 + M_3 - M_{12} - M_{23} - M_{31} + M_{123}$, это число наибольшее, если M_{12}, M_{23}, M_{31} наименьшие из возможных (то есть 18). Получаем наибольшее количество 32 + 20 + 26 – 18 – 18 – 18 + 18 = 42.

6. Сколько четырёхзначных чисел, в записи которых встречается сочетание цифр «12»?

Ответ: 279.

Решение. Чисел вида **12 всего $9 \cdot 10 = 90$; чисел вида *12* также $9 \cdot 10 = 90$; чисел вида 12** всего $10 \cdot 10 = 100$. Заметим, что только одно число учтено дважды: 1212 посчитали и в первой группе, и в третьей. Значит, всего 90 + 90 + 100 – 1 = 279 чисел.

7. На субботнем кружке по математике 6 учеников запускали самолётики, 4 играли в морской бой, остальные решали задачи. Только Игорёк успевал запускать самолётики, пока Витя пытался подбить его корабли. Сколько ребят были заняты решением задач, если на кружок пришли 15 человек?

Ответ: 6.

Решение. В сумму 6 + 4 = 10 входят все играющие, а Игорёк — дважды. Значит, играли 10 – 1 = 9 участников кружка. Остальные 15 – 9 = 6 решали задачи.

8. По дороге от Анино до Генино встречаются Бенино и Венино. Коля шёл пешком из Бенино в Анино, а Вася ехал из Венино в Генино на велосипеде вдвое быстрее, нежели Коля идёт пешком. Оба вышли в 8:00 и закончили свой путь в 10:00. Коля в 8:20 встретил Васю в 2 км от Бенино. Сколько км составляет расстояние от Анино до Генино?

Ответ: 30.

Решение. Так как Коля встретил Васю, то по дороге населенные пункты следуют в порядке А — В — Б — Г. Коля за 20 минут прошёл 2 км, значит, его скорость 6 км/ч. Скорость Васи втрое больше, то есть равна 12 км/ч, за 20 минут он проехал 4 км. Расстояние от Бенино до Анино равно 6 км/ч · 2 ч = 12 км, расстояние от Венино до Генино равно 12 км/ч · 2 ч = 24 км.

Тогда от Анино до Генино равно 12 + 24 – 6 = 30 км.

9. Мише продиктовали пять различных чисел: одно четырёхзначное и четыре двузначных. Он записал их подряд, получив 341215341315. Какое четырёхзначное число продиктовали Мише?

Ответ: 1534.

Решение. Подчеркнём равные пары цифр: 341215341315. Каждая пара целиком образует двузначное число или была целиком в четырёхзначном числе. Значит, одна комбинация 15 была в четырёхзначном числе и одна комбинация 34 была в четырёхзначном числе. То есть, они образовывали четырёхзначное число. Из записи видно, что речь идёт о 1534.

Замечание. Можно также перебрать 5 вариантов, какие 4 цифры составляют четырёхзначное число.

10. Дана полоска из 4 клеток. Каждую можно покрасить в красный, желтый или зеленый цвет. Сколькими способами это можно сделать, чтоб любые три подряд идущие клетки были всех трёх цветов?

Ответ: 6.

Решение. Две центральные клетки полоски должны быть разного цвета, поэтому крайние клетки одного цвета. Цвет клеток 1 и 4 можно выбрать 3 способами, цвет клетки 2 — двумя способами, цвет клетки 3 — одни способом. Всего $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов.

11. В группе 15 человек знают английский язык, 16 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 21 человек знает польский язык. В группе нет людей, знающих три языка, и 23 человека в группе знают ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе знают ровно один язык из перечисленных?

Ответ: 26.

Решение. В группе нет людей, знающих три языка, а значит, нет людей знающих все четыре языка. В сумме 15 + 16 + 20 + 21 = 72 учтён каждый человек в группе, 23 из них учтены дважды. Значит, в группе 72 – 23 = 49 человек. Из них 23 знают два языка, а 49 – 23 = 26 знают только один язык.

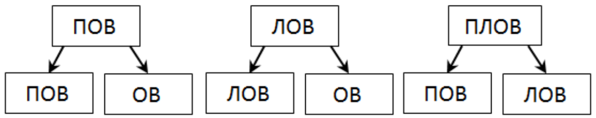
Решение (конфетное). Выдадим каждому за каждый известный ему язык конфету. Всего выдано 15 + 16 + 20 + 21 = 72 конфеты. При этом 23 человека получили по две конфеты, значит, $72 - 2 \cdot 23 = 26$ человек получили по одной конфете, то есть знают ровно один язык.

12. В первом классе учатся 35 ребят. Некоторые из них знают все буквы, кроме «П», которую просто пропускают при письме. Остальные знают все буквы, кроме «Л»,

которую так же пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «ПОВ», 18 других учеников — слово «ЛОВ», а остальных — слово «ПЛОВ». При этом слова «ПОВ» и «ЛОВ» оказались написанными по 12 раз. Сколько ребят написали своё слово верно?

Ответ: 17.

Решение. Слово «ПЛОВ» не написал правильно никто, потому что никто не умеет писать одновременно и букву «П», и букву «Л». Были написаны только слова «ПОВ», «ЛОВ» и «ОВ».



Слова «ПОВ» и «ЛОВ» написаны по 12 раз, поэтому слово «ОВ» написали $35 - 12 - 12 = 11$ ребят из 28. Слова «ПОВ» и «ЛОВ» должны были написать $10 + 18 = 28$ человек. Поэтому только $28 - 11 = 17$ ребят справились со своей задачей.

13. В четырёх ящиках спрятали 3 шарика. Ящики стоят в ряд и на них висят таблички: «0», «0», «1» и «1». Ни одна надпись не соответствует числу шариков, лежащих в ящике. Сколько шариков лежит в последнем ящике?

Ответ: 0.

Решение. Рассмотрим все варианты.
(1) Если в одном ящике 3 шарика, а остальные пусты, то одна из табличек «0» будет правдивой.
(2) Если в трёх ящиках по 1 шарику, а один — пустой, то одна из табличек «1» будет правдивой.
(3) Если в ящиках 0, 0, 1 и 2 шарика (в каком-то порядке), то пустые ящики должны быть с табличками «1».
Значит, в последний ящик пуст.

14. Имеется ряд кнопок. Они разбиты на три группы: по 7, 3 и 3 кнопки. Любые две кнопки из одной группы не являются соседями. Если нажаты все кнопки одной группы, то лампочка загорается (независимо от того, есть лишние нажатия или нет). Какое наименьшее число кнопок нужно нажать, чтобы лампочка загорелась?

Ответ: 5 кнопок.

Решение. Всего кнопок 13. Кнопки первой группы занимают все нечётные места, иначе какие-то две из них окажутся соседними. Если нажать 5 чётных кнопок, то какие-то три из них будут из группы 2 или 3, тогда лампочка загорится.

Если нажать только 4, то могут оказаться по 2 кнопки из групп 2 и 3, тогда лампочка не загорится.

Комментарий. Обратите внимание: в задаче спрашивают наименьшее количество. Значит, надо (1) показать наименьшее число нажатий, чтобы лампочка точно загорелась, (2) показать, что при любом меньшем числе нажатий лампочка может не загореться.

15. В классе 32 ученика. Известно, что на плавание ходят в 3 раза больше человек, чем на теннис, и в 6 раз больше, чем на плавание и теннис вместе. Сколько детей не ходит ни на плавание, ни на теннис, если их не больше 10?

Ответ. 4.

Решение. Пусть на плавание и теннис одновременно ходят n учеников, тогда на плавание ходят $6n$ учеников, а на теннис (без плавания) — $2n$. Всего учеников, которые ходя на плавание или теннис $6n + 2n - n = 7n$. Это число не меньше, чем $32 - 10 = 22$ и не более 32. Только одно число из этого промежутка кратно семи — число 28. Тогда $32 - 28 = 4$ ученика не ходят ни на теннис, ни на плавание.

16. В деревне Отличнино в воскресенье домашнее задание по математике делали 100 человек, по русскому языку — 50, по физике — 48. По другим предметам домашнего задания не было. Ровно по двум предметам домашнее задание делали вдвое меньше учеников, чем тех, кто только по одному, а по всем трём — втрое меньше, чем только по одному. Сколько учеников делали домашнее задание в воскресенье?

Ответ: 121.

Решение. Если ровно по трём предметам задания делали $2n$ человек, то ровно по одному — $6n$ учеников, а по двум — $3n$ учеников. В сумму $100 + 50 + 48 = 198$ эти $2n$ человек учитываются 3 раза, $6n$ человек по одному разу и $3n$ учеников — по 2 раза. Значит, $3 \cdot 2n + 2 \cdot 3n + 1 \cdot 6n = 18n = 198$, то есть $n = 11$.

Всего делали домашнее задание $6n + 3n + 2n = 11n = 121$ ученик.