

Блок 3. Задачи на движение

Задания Интернет-карусели

1. Сколько раз из наибольшего трёхзначного числа надо вычесть наименьшее двузначное, чтобы получить наибольшее двузначное число?
2. Путешественник идет из одного города в другой 10 дней, а второй путешественник тот же путь проходит за 15 дней. Через сколько дней встретятся путешественники, если выйдут одновременно навстречу друг другу из этих городов?
3. Электропоезд длиной 21 метр проезжает мимо столба за 7 секунд. Сколько секунд ему понадобится, чтобы проехать мост длиной 42 метра?
4. Хотят галки сесть на палки. Попробовали по одной на палку — четырем не хватило места. Стали садиться по две на палку — три палки остались свободными. Сколько было галок?
5. Бегуны Жора и Дима соревнуются в беге. Дима бежит со скоростью 6 м/с, а Жора со скоростью 4 м/с. Их соревнование длилось 10 минут, и Жора проиграл Диме ровно один круг. Сколько метров составляет длина круга?
6. За круглым столом сидят 2016 человек. Каждый из них — рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Оказалось, что рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец. Каждого из сидящих за столом спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. Получили только ответы «один» и «два». Какое наименьшее количество лжецов может сидеть за столом?
7. Моторная лодка в 9:00 отправилась вверх по течению реки. В момент её отправления с лодки был брошен в реку мяч. В 9:15 лодка повернула и поплыла вниз по течению. Через сколько минут после начала своего движения лодка догонит мяч? Собственная скорость лодки оставалась неизменной.
8. Для полёта на Луну в ракете не хватает 4 поваров-девочек, 6 механиков-мальчиков и 3 помощников. Помощниками могут быть и девочки, и мальчики. Сколькими способами можно набрать штат на ракету, если хотят полететь 14 коротышек: 6 девочек и 8 мальчиков?
9. Барон Мюнхгаузен, проснувшись рано утром, взял со стола новые часы и вышел на пробежку. Пробежав 6 километров, он посмотрел на часы и ахнул: прошло 6 минут! Барон быстро посчитал свою скорость (60 км/ч!) и побежал домой писать письмо в Олимпийский комитет. Да вот только в его новых часах час содержит 25 минут, а в его минуте 360 реальных секунд. Сколько км/ч в действительности составляет скорость Барона?

10. В честь Нового Года нужно установить несколько одинаковых надувных Дедов Морозов. Первый рабочий своим насосом надувает одного Деда Мороза за 6 минут, второй — за 10 минут, третий — за 15 минут. Каждый полностью надул несколько Дедов Морозов, все потратили одинаковое число минут. Какое наименьшее количество Дедов морозом могло быть надуто?
11. Четыре приятеля собирали грибы. На вопрос: "Сколько грибов вы вместе собрали?" они ответили так. Петя: "Не меньше 50". Вася "Белых — десять, а остальные я не считал". Миша: "Вася ошибается". Юра: "Не больше 49". Сколько ребят сказали правду?
12. Миша после просмотра кино решил спуститься по эскалатору на этаж ниже — победать. Он проголодался и побежал вниз, насчитав 35 ступенек. После обеда он с той же скоростью (относительно эскалатора) поднялся снова наверх купить билеты на завтрашний сеанс. На этот раз насчитал 140 ступенек. Купив билет, он заметил, что эскалатор отключили, но всё равно спустился по нему. Сколько ступенек он насчитал в этот раз?
13. Паша с инструктором пошел кататься на лыжах в Битцевский лес. Они выбрали ровный участок длиной 12 км и побежали. Паша, впервые встав на лыжи, поехал со скоростью 70 м/мин, а инструктор помчался со своей обычной скоростью 250 м/мин. Добежав до конца, инструктор развернулся и поехал Паше навстречу. Через сколько минут от начала движения они встретятся?
14. Если Оля бежит на тренировку через парк, а обратно домой едет на трамвае, то всего на дорогу она тратит 1,5 ч. Если же она едет на трамвае в оба конца, то весь путь у неё занимает 30 мин. Сегодня Оля и на тренировку, и обратно бежала через парк. Сколько минут она потратила на дорогу?
15. Виктор и Кирилл плавают в бассейне по соседним дорожкам. Стартуют они одновременно с противоположных концов бассейна, «встречаются» и плывут дальше. Доплыв до конца дорожки, они мгновенно разворачиваются, опять «встречаются» и так далее. Виктор проплывает дорожку за 6 минут, а Кирилл за 8 минут. Сколько минут пройдет после старта до момента, когда Виктор впервые догонит Кирилла, плывя с ним в одном направлении?

Блок 3. Задачи на движение

Задания Интернет-карусели. Указания и решения

В набор заданий интернет-карусели были включены задачи, похожие (по способу решения) на задания подготовительного занятия.

Некоторые задачи (например, № 2) можно решать как с привлечением дробей, так и без них. Ученикам 6 классов полезно понять оба способа. Для пятиклассников решения с дробями можно рассказывать в качестве рекламы будущих тем уроков математики.

Также включены задачи на другие темы: № 1 и № 4 (арифметика), № 6 и № 11 (логика), № 8 (комбинаторика), № 10 (по сути — поиск наименьшего общего кратного).

1. Сколько раз из наибольшего трёхзначного числа надо вычесть наименьшее двузначное, чтобы получить наибольшее двузначное число?

Ответ: 90.

Решение. Речь идёт о числах 999, 10 и 99. Надо вычесть 10 столько раз, чтоб 999 уменьшилось до 99. Считаем: $999 - 99 = 900$; $900 : 10 = 90$.

2. Путешественник идет из одного города в другой 10 дней, а второй путешественник тот же путь проходит за 15 дней. Через сколько дней встретятся путешественники, если выйдут одновременно навстречу друг другу из этих городов?

Ответ: 6.

Замечание. Пятиклассники могут решить задачу (способ 1) без привлечения дробей, а ученикам 6 классов проще использовать обыкновенные дроби (способ 2). Советуем разобрать с шестиклассниками оба решения.

Решение 1. За 30 дней путешественники проходят $30 : 10 + 30 : 15 = 5$ расстояний между городами. Следовательно, они встретятся через $30 : 5 = 6$ дней.

Решение 2. За день один преодолевает $1/10$ расстояния, второй — $1/15$ расстояния. За день расстояние между ними уменьшается на $1/10 + 1/15 = 1/6$. Значит, они встретятся через 6 дней.

3. Электропоезд длиной 21 метр проезжает мимо столба за 7 секунд. Сколько секунд ему понадобится, чтобы проехать мост длиной 42 метра?

Ответ: 21 секунда.

Решение. Поезд проезжает 21 метр за 7 секунд. Преодолеть мост — это проехать длину моста (42 метра) и еще длину поезда (21 метр). Значит, поезду надо проехать $21 + 42 = 21 \cdot 3$ метра, на что уйдёт $7 \cdot 3 = 21$ секунда.

4. Хотят галки сесть на палки. Попробовали по одной на палку — четырьмя не хватило места. Стали садиться по две на палку — три палки остались свободными. Сколько было галок?

Ответ: 14 галок.

Решение. Если было Γ галок, то они садились на $(\Gamma - 4)$ палки. Тогда второй раз галки сели по двое на $(\Gamma - 4) - 3 = \Gamma - 7$ палок. Значит, $\Gamma = 2 \cdot (\Gamma - 7)$, откуда $\Gamma = 2\Gamma - 14$, $\Gamma = 14$.

Комментарий. Можно решить и без уравнения. Если бы палок было в первый раз достаточно, то второй раз галки сели по двое, освободив 7 мест. Значит, их было 14.

5. Бегуны Жора и Дима соревнуются в беге. Дима бежит со скоростью 6 м/с, а Жора со скоростью 4 м/с. Их соревнование длилось 10 минут, и Жора проиграл Диме ровно один круг. Сколько метров составляет длина круга?

Ответ: 1200 метров.

Решение. Дима за 10 минут = 600 секунд пробежал $6 \cdot 600 = 3600$ метров, а Жора — $4 \cdot 600 = 2400$ метров. Дима обогнал Жору на $3600 - 2400 = 1200$ м. Это и есть длина круга.

6. За круглым столом сидят 2016 человек. Каждый из них — рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Оказалось, что рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец. Каждого из сидящих за столом спросили, сколько лжецов сидит рядом с ним. Получили только ответы «один» и «два». Какое наименьшее количество лжецов может сидеть за столом?

Ответ: 1008.

Решение. Рыцарь, сидящий между двух рыцарей, не может дать ответ «один» или «два». Поэтому рыцарей, сидящих подряд, может быть не более двух. Группы по 1 или 2 рыцарей, чередуются с группами лжецов по 2 и более лжецов.

Чем больше рыцарей, тем меньше лжецов. Из вышесказанного, наибольшее число рыцарей возможно, когда все группы лжецов и рыцарей по 2 человека. Тогда рыцарей и лжецов поровну, то есть по 1008 человек.

Комментарий. Если понять условие задачи, то пример с наименьшим числом лжецов становится понятен. Для карусели этого достаточно, для полного решения задачи — нет. Рекомендуем обсудить с учениками, как объяснить, что найденный пример оптимален.

7. Моторная лодка в 9:00 отправилась вверх по течению реки. В момент её отправления с лодки был брошен в реку мяч. В 9:15 лодка повернула и поплыла вниз по те-

чению. Через сколько минут после начала своего движения лодка догонит мяч? Собственная скорость лодки оставалась неизменной.

Ответ: 30.

Решение. Относительно самого мяча, лодка удаляется от него и приближается к нему с одной и той же скоростью — собственной скоростью лодки. Поскольку лодка 15 минут удалялась от мяча, то она догонит его через 15 минут после того, как она повернула назад.

Комментарии. (1) Сравните с задачей № 7 подготовительного занятия.

(2) Более наглядный аналог ситуации, описанной в задаче, можно сформулировать следующим образом. Предположим, Маша стоит в вагоне, а Петя идёт по коридору вагона сначала от неё, а потом с той же скоростью обратно к ней. Поезд едет. Относительно стоящего наблюдателя вне поезда Петя идёт туда и обратно с разными скоростями. Но Петя идёт туда и обратно с одной скоростью относительно Маши.

8. Для полёта на Луну в ракете не хватает 4 поваров-девочек, 6 механиков-мальчиков и 3 помощников. Помощниками могут быть и девочки, и мальчики. Сколькими способами можно набрать штат на ракету, если хотят полететь 14 коротышек: 6 девочек и 8 мальчиков?

Ответ: 1680.

Решение. Выбор из 6 девочек четырёх поваров — выбор двух лишних девочек: $6 \cdot 5 : 2 = 15$ способов. Выбор из 8 мальчиков шестерых механиков — выбор двух лишних мальчиков: $8 \cdot 7 : 2 = 28$ способов. Из остальных $(14 - 4 - 6) = 4$ коротышек можно выбрать 3 помощников 4 способами. Итого: $15 \cdot 28 \cdot 4 = 1680$ способов.

Комментарий. Напоминаем, выбрать 2 объекта из n штук можно $n(n - 1) : 2$ способами.

9. Барон Мюнхгаузен, проснувшись рано утром, взял со стола новые часы и вышел на пробежку. Пробежав 6 километров, он посмотрел на часы и ахнул: прошло 6 минут! Барон быстро посчитал свою скорость (60 км/ч!) и побежал домой писать письмо в Олимпийский комитет. Да вот только в его новых часах час содержит 25 минут, а в его минуте 360 реальных секунд. Сколько км/ч в действительности составляет скорость Барона?

Ответ: 10 км/ч.

Решение. Барон за 6 его минут проходит 6 км, значит, за одну его минуту (или 360 реальных секунд) — 1 км. В настоящем часе $3600 = 360 \cdot 10$ реальных се-

кунд, значит, Барон за реальный час пройдёт 10 км. Значит, его скорость 10 км/ч.

Комментарий. Решите задачу, если реальный час на часах Барона содержит 25 минут, а в его минуте 360 его секунд.

Ответ: 25 км/ч. Действительно, за свою минуту Барон проходит 1 км, а за 25 его минут, равных одному реальному часу, — 25 км. Значит, его скорость 25 км/ч.

10. В честь Нового Года нужно установить несколько одинаковых надувных Дедов Морозов. Первый рабочий своим насосом надувает одного Деда Мороза за 6 минут, второй — за 10 минут, третий — за 15 минут. Каждый полностью надул несколько Дедов Морозов, все потратили одинаковое число минут. Какое наименьшее количество Дедов морозом могло быть надуто?

Ответ: 10 штук.

Решение. Пока третий рабочий надует одного Деда Мороза, второй не надует целое число Дедов Морозов. Если третий надует двух за 30 минут, то и первый, и второй надут целое число: первый — $30 : 6 = 5$ штук, второй — $30 : 10 = 3$ штуки. Итого $2 + 5 + 3 = 10$ штук.

11. Четыре приятеля собирали грибы. На вопрос: "Сколько грибов вы вместе собрали?" они ответили так. Петя: "Не меньше 50". Вася: "Белых — десять, а остальные я не считал". Миша: "Вася ошибается". Юра: "Не больше 49". Сколько ребят сказали правду?

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что Петя и Юра противоречат друг другу, но в любом случае один из них прав. Такие же выводы можно сделать про утверждения Васи и Миши. Значит, верны два утверждения.

12. Миша после просмотра кино решил спуститься по эскалатору на этаж ниже — пообедать. Он проголодался и побежал вниз, насчитав 35 ступенек. После обеда он с той же скоростью (относительно эскалатора) поднялся снова наверх купить билеты на завтрашний сеанс. На этот раз насчитал 140 ступенек. Купив билет, он заметил, что эскалатор отключили, но всё равно спустился по нему. Сколько ступенек он насчитал в этот раз?

Ответ: 56.

Решение. Когда Миша бежал вниз, ступеньки «убегали под эскалатор», когда бежал вверх, ступеньки «выползали из-под эскалатора».

При подъёме вверх Миша насчитал в 4 раза больше ступенек, значит, он бежал вверх в 4 раза дольше, чем вниз. «Выползло» при подъёме в 4 раза больше ступенек, чем «убежало» при спуске.

Если при спуске «убежало» n ступенек, то неподвижный эскалатор состоит, с одной стороны, из $35 + n$ ступенек, с другой стороны, из $140 - 4n$ ступенек. Значит, $5n = 140 - 35 = 105$, $n = 21$. То есть, неподвижный эскалатор состоит из $35 + 21 = 56$ ступенек.

Комментарий. Можно построить рассуждения, избежав составления уравнения.

Если Миша сбежит вниз 4 раза, то он насчитает 140 ступенек, а убегут от него столько же ступенек, сколько выползло при подъёме. Поэтому $140 + 140 = 280$ – это число ступенек эскалатора, взятое $4 + 1 = 5$ раз.

Комментарий. Можно задать школьникам следующие вопросы (с довольно парадоксальными ответами).

✓ Человек спускается по эскалатору, идущему вниз. Когда он насчитает меньше ступенек, двигаясь быстрее или медленнее?

Решение. Если он идёт быстрее, то он быстрее пройдёт эскалатор. Если он быстрее пройдёт эскалатор, то меньше ступенек успеет «убежать». Значит, он насчитает больше ступенек.

✓ Человек поднимается по эскалатору, идущему вверх. Когда он насчитает меньше ступенек, двигаясь быстрее или медленнее?

Решение. Если он идёт быстрее, то он быстрее пройдёт эскалатор. Если он быстрее пройдёт эскалатор, то меньше ступенек успеет «выползти». Значит, он насчитает меньше ступенек.

13. Паша с инструктором пошел кататься на лыжах в Битцевский лес. Они выбрали ровный участок длиной 12 км и побежали. Паша, впервые встав на лыжи, поехал со скоростью 70 м/мин, а инструктор помчался со своей обычной скоростью 250 м/мин. Добежав до конца, инструктор развернулся и поехал Паше навстречу. Через сколько минут от начала движения они встретятся?

Ответ: через 75 минут.

Решение (длинное). Можно найти время, за которое инструктор доедет до поворота, после чего рассчитать время встречи.

(1) Время, за которое инструктор проедет до поворота участок:

$$12 \text{ км} : 250 \text{ м/мин} = 12\,000 \text{ м} : 250 \text{ м/мин} = 48 \text{ мин.}$$

(2) Паша за 48 минут проехал: $48 \text{ мин} \cdot 70 \text{ м/мин} = 3\,360 \text{ м.}$

(3) Расстояние от Паши до инструктора стало: $12\,000 \text{ м} - 3\,360 \text{ м} = 8\,640 \text{ м.}$

(4) Скорость сближения: $(70 + 250) = 320 \text{ м/мин.}$

(5) От разворота до встречи пройдёт $8\,640 \text{ м} : 320 \text{ м/мин} = 27 \text{ мин.}$

(6) С момента старта пройдёт $48 + 27 = 75 \text{ мин.}$

Решение (короткое). Вычисления можно сократить. Можно считать, что Паша и инструктор проехали навстречу друг другу $12 + 12 = 24 \text{ км} = 24\,000 \text{ м.}$ Их скорость сближения равна $(70 + 250) = 320 \text{ м/мин.}$ Время до встречи будет равно $24\,000 \text{ м} : 320 \text{ м/мин} = 75 \text{ мин.}$

Комментарий. Можно считать, что инструктор не стартует вместе с Пашей, а находится на расстоянии 24 км от него, после чего едет ему навстречу.

14. Если Оля бежит на тренировку через парк, а обратно домой едет на трамвае, то всего на дорогу она тратит 1,5 ч. Если же она едет на трамвае в оба конца, то весь путь у неё занимает 30 мин. Сегодня Оля и на тренировку, и обратно бежала через парк. Сколько минут она потратила на дорогу?

Ответ: 150.

Решение. На трамвай уходит $30 : 2 = 15$ минут. Тогда на дорогу по парку Оля тратит $1,5 \text{ ч} - 15 \text{ мин} = 75 \text{ мин.}$ На путь через парк в оба конца уйдёт $75 \cdot 2 = 150$ минут.

Комментарий для учителя. Обратите внимание, что эта задача никак не связана с закономерностью между расстоянием, скоростью и временем. В каком-то смысле, её можно не считать задачей на движение.

15. Виктор и Кирилл плавают в бассейне по соседним дорожкам. Стартуют они одновременно с противоположных концов бассейна, «встречаются» и плывут дальше. Доплыв до конца дорожки, они мгновенно разворачиваются, опять «встречаются» и так далее. Виктор проплывает дорожку за 6 минут, а Кирилл за 8 минут. Сколько минут пройдёт после старта до момента, когда Виктор впервые догонит Кирилла, плывя с ним в одном направлении?

Ответ: 24.

Решение. Виктор догонит Кирилла, плывя с ним в одном направлении, когда разница в расстоянии, которое они проплыли, станет равной длине дорожки. Разделим дорожку на 48 условных единиц длины. Тогда, разница в скорости Виктора и Кирилла составляет 2 единицы в минуту. Разница в 48 единиц будет покрыта через $48 : 2 = 24$ минуты.