Блок 1. Текстовые задачи

Интернет-карусель (2023–2024)

Задания

1. Сколько 4-значных натуральных чисел, обладающих одновременно двумя свойства: 9/2 числа еще четырёхзначное число, а половина числа уже четырёхзначная?
2. Санта раздавал конфеты. Сначала он раздал 3/7 всех своих конфет и еще 3 конфеты. Затем он раздал 8/11 остатка и еще 3 конфеты. И, наконец, в следующий раз он раздал 2/5 оставшихся конфет и еще 3 конфеты. По дороге домой из мешка вывалились 2/3 остатка, и, придя домой, Санта с удовольствием съел последние 5 конфет. Сколько конфет было в мешке у Санты первоначально?
3. Карлсон ест свой новогодний подарок. Через час после начала этого процесса он съел ровно 10 % всех конфет (все они были шоколадными) и еще 6 карамелек. Еще через час он съел ровно 10 % оставшихся конфет и еще 10 батончиков. Остальные конфеты он подарил Малышу. Сколько минимум конфет было в подарке?
4. В ряд выписано N последовательных натуральных чисел. Сумма любых трёх из них не менее 50, но не более 100. При каком наибольшем N такое возможно?
5. Выписали 1000 подряд идущих натуральных чисел. Всего выписано 3000 цифр. Каково наибольшее из выписанных чисел?
6. Выписано несколько подряд идущих натуральных чисел. Всего выписано 2023 цифр. Какое наибольшее возможное количество чисел?
7. В кошельке рабочего лежат не меньше 11 монет, каждая — копейка или пятак. Пятаков меньше, чем копеек, и даже если их количество увеличить вдвое, то их всё равно будет меньше. Но вот если количество пятаков увеличить на 15, то их уже станет больше, чем даже удвоенное количество копеек. Сколько монет в кошельке?
8. В соревнованиях роботов-терминаторов по бегу были зафиксированы следующие результаты:
   T10 прошел 1 км на 1 минуту быстрее, чем T100 прошел 2 км,
   T100 прошел 1 км на 2 минуты быстрее, чем T1000 прошел 2 км,
   T1000 прошел 1 км на 4 минуты быстрее, чем T10 прошел 2 км.

   Сколько км/ч составляет скорость робота T1000?
9. В коробке лежат 2024 шаров — белых, красных и чёрных. Белых втрое больше, чем красных. Количество чёрных шаров кратно 100, это больше, чем красных, но меньше, чем белых. Каким может быть количество чёрных шаров?
10. Группа товарищей-волонтеров решила купить некоторый предмет, чтобы помочь другой группе товарищей. Предмет стоил недешево — никак не меньше 170 центов, но и не больше 195. Товарищи договорились купить предмет вскладчину. Чтобы

набрать точную сумму, все могли внести поровну центов. В последний момент двое товарищей отказались участвовать в проекте. Оказалось, что оставшимся теперь можно внести на 1 цент больше и нужная сумма в точности наберется. Сколько центов стоил предмет?

11. Вовочке дали задание перемножить два числа, одно из которых на 6 меньше другого. Вовочка выполнил задание, но учитель сказал ему, что он ошибся. «No way!» — подумал Вовочка и для проверки разделил свое произведение на меньшее число, и действительно, получил почему-то это же самое меньшее число, да еще 22 в остатке. Тогда он начал искать ошибку в умножении (молодец Вовочка, будьте как он!) и нашел — на самом деле в ответе цифра сотен должна быть больше на 2. А какой правильный ответ должен был получить Вовочка, выполняя задание учителя?
12. Тимоша выставил в ряд 50 солдатиков. Среди них есть красные, синие, но может есть еще какие-то. Рядом с каждым красным солдатиком стоит синий. Красных на N штук больше, чем синих. При каком наибольшем N такое возможно?
13. Тимоша выставил в ряд 50 солдатиков. Среди них есть красные, синие, жёлтые и зеленые, но может есть еще какие-то. Красных солдатиков в 2 раза больше, чем жёлтых. Рядом с каждым красным солдатиком стоит синий, рядом с каждым желтым — зеленый. Какое наибольшее количество красных солдатиком может быть в таком ряду?
14. Два курьера каждое утро одновременно в одно и то же время выходят из двух пунктов навстречу друг другу для обмена корреспонденцией. Но вчера первый вышел на 6 минут раньше, а второй вовремя; их встреча произошла на 2 минуты раньше обычного. Сегодня второй курьер вышел на 9 минут раньше обычного, а первый вышел вовремя. На сколько минут раньше произойдет их встреча? Каждый из курьеров идёт каждый день на встречу с одной и той же скоростью, скорости курьеров могут отличаться.
15. Два курьера каждое утро одновременно в одно и то же время выходят из двух пунктов навстречу друг другу для обмена корреспонденцией. Вчера первый вышел на 6 минут раньше, а второй вовремя; их встреча произошла на 2 минуты раньше обычного. Сегодня первый курьер вышел на 9 минут позже, а второй вовремя. На сколько минут позже произойдет их встреча? Каждый из курьеров идёт каждый день на встречу с одной и той же скоростью, скорости курьеров могут отличаться.

Ответы, указания, решения

1. Сколько 4-значных натуральных чисел, обладающих одновременно двумя свойства: 9/2 числа еще четырёхзначное число, а половина числа уже четырёхзначная?

   Ответ: 223.

   Решение. Половина числа четырёхзначная у чисел от 2000, а 9/2 четырёхзначное у чисел не более 2222. От 2000 до 2222 всего 223 числа.

2. Санта раздавал конфеты. Сначала он раздал 3/7 всех своих конфет и еще 3 конфеты. Затем он раздал 8/11 остатка и еще 3 конфеты. И, наконец, в следующий раз он раздал 2/5 оставшихся конфет и еще 3 конфеты. По дороге домой из мешка вывалились 2/3 остатка, и, придя домой, Санта с удовольствием съел последние 5 конфет. Сколько конфет было в мешке у Санты первоначально?

   Ответ: 217.

   Решение. Посчитаем с конца. Оставшиеся 5 конфет — это 1/3 остатка, значит, весь остаток — 15 конфет.

   Перед этим Санта раздал 2/5 оставшихся конфет и еще 3 конфеты, после чего у него осталось 15 конфет. Значит, 15 + 3 = 18 конфет составляют 3/5 остатка, значит, весь остаток состоит из 18 : 3 · 5 = 30 конфет.

   Перед этим он раздал 8/11 предыдущего остатка и еще 3 конфеты, после чего у него осталось 30 конфет. Значит, 30 + 3 = 33 конфеты — это 3/11 остатка, а весь остаток — 33 : 3 · 11 = 121 конфета.

   Наконец, в первый раз он раздал 3/7 всех конфет и еще 3 конфеты и у него осталась 121 конфета. Значит, 121 + 3 = 124 конфеты — это 4/7 всех конфет, то есть искомое количество равно 124 : 4 · 7 = 217 конфет.

3. Карлсон ест свой новогодний подарок. Через час после начала этого процесса он съел ровно 10 % всех конфет (все они были шоколадными) и еще 6 карамелек. Еще через час он съел ровно 10 % оставшихся конфет и еще 10 батончиков. Остальные конфеты он подарил Малышу. Сколько минимум конфет было в подарке?

   Ответ 40.

   Решение. На второй час у Карлсона осталось количество конфет, кратное 10, пусть оно равно $10t$. В подарке было $(10t + 6) \cdot 10/9$ конфет. Чем меньше значение t, тем меньше конфет было в подарке. Значение $10t + 6$ должно быть кратно 9, что возможно при минимальном значении $t = 3$. В этом случае в подарке было (30 + 6) · 10/9 = 40 конфет.

4. В ряд выписано N последовательных натуральных чисел. Сумма любых трёх из них не менее 50, но не более 100. При каком наибольшем N такое возможно?

   Ответ: 19.

   Указание: подходят числа 16, 17, 18, …, 32, 33, 34.

   Решение. Если первое число не более 15, то сумма трёх меньших чисел не превосходит 15 + 16 + 17 = 48, что меньше 50. Если последнее число не менее 35, то сумма трёх больших чисел не менее 33 + 34 + 35 = 102, что более 100. Тогда первое число не менее 16, последнее — не более 34. С другой стороны, ряд от 16 до 34 подходит под условие, в нём 34 – 16 + 1 = 19 чисел.

5. Выписали 1000 подряд идущих натуральных чисел. Всего выписано 3000 цифр. Каково наибольшее из выписанных чисел?

   Ответ: 1049.

   Решение. Ряд не может начинаться с 3-значного, иначе цифр более 3000; ряд не может заканчиваться 3-значным, иначе цифр меньше 3000. Значит, взяты все 900 трёхзначных чисел. Осталось 100 чисел, в которых 3000 – 3 · 900 = 300 цифр. В каждом есть 2 цифры, остальные 300 – 2 · 100=100 есть только по 2 штуки в четырёхзначных. Значит, вместе с трёхзначными числами еще 50 двузначных и 50 четырёхзначных. То есть подходят только числа от 50 до 1049.

6. Выписано несколько подряд идущих натуральных чисел. Всего выписано 2023 цифр. Какое наибольшее возможное количество чисел?

   Ответ: 709.

   Решение. Чем раньше начинается ряд, тем больше чисел. Все однозначные, двузначные и трёхзначные содержат 9 + 90 · 2 + 900 · 3 > 2023 цифр. Если выписать все однозначные и двузначные, то останется 2023 – 189 = 1834 цифр — это не кратно 3. Начнём с числа 3 и будет 1836 цифр для 612 трёхзначных чисел. Итого числа от 3 до 99 + 612 = 711. Это 709 чисел.

7. В кошельке рабочего лежат не меньше 11 монет, каждая — копейка или пятак. Пятаков меньше, чем копеек, и даже если их количество увеличить вдвое, то их всё равно будет меньше. Но вот если количество пятаков увеличить на 15, то их уже станет больше, чем даже удвоенное количество копеек. Сколько монет в кошельке?

   Ответ: 11 или 13.

   Указание: 3 пятака и 8 копеек или 4 пятака и 9 копеек.

   Решение. Пусть x пятаков и y копеек. Из условия имеем $2x < y$, $x + 15 > 2y$. Отсюда $4x < 2y < x + 15$ или $x \le 4$.

   Рассмотрим 4 варианта:

(1) если $x = 1$, то 1 пятак и не менее 11 – 1 = 10 копеек, что невозможно: 1 + 15 < 10 + 10;

(2) если $x = 2$, то 2 пятака и не менее 11 – 2 = 9 копеек, что невозможно: 2 + 15 < 9 + 9;

(3) если $x = 3$, то 3 пятака, а копеек менее (3 + 15) : 2 = 9, но не менее 11 – 3 = 8, то есть ровно 8;

(4) если $x = 4$, то 4 пятака, а копеек менее (4 + 15) : 2 = 9,5, но более 4 · 2 = 8, то есть ровно 9.

Итог: подходят 2 варианта (3 пятака, 8 копеек и 4 пятака, 9 копеек), всего 3 + 8 = 11 монет или 4 + 9 = 13 монет.

8. В соревнованиях роботов-терминаторов по бегу были зафиксированы следующие результаты:
T10 прошел 1 км на 1 минуту быстрее, чем T100 прошел 2 км,
T100 прошел 1 км на 2 минуты быстрее, чем T1000 прошел 2 км,
T1000 прошел 1 км на 4 минуты быстрее, чем T10 прошел 2 км.

Сколько км/ч составляет скорость робота T1000?

Ответ: 30.

Решение (таблицы). Если роботы 1 км прошли за x, y, z минут, то из условия следуют данные, указанные в таблице:

	1 км	2 км
T10	x	$z + 4$
T100	y	$x + 1$
T1000	z	$y + 2$

Если взять $z = 4t$ и учесть, что 2 км робот проходит за вдвое большее время, то получаем таблицу:

	1 км	2 км
T10	$2t + 2$	$4t + 4$
T100	$t + 1{,}5$	$2t + 3$
T1000	$4t$	$t + 3{,}5$

Из нижней строки следует, что $2 \cdot 4t = t + 3{,}5$, откуда $t = 0{,}5$. Значит, робот T1000 проезжает 1 км за 4 · 0,5 = 2 минуты, а за час — 30 км. Его скорость 30 км/ч.

Решение (текст). Из первого условия следует, что T10 пройдет 2 км на 2 минуты быстрее, чем T100 пройдет 4 км, но по третьему условию те же 2 км T10 проходит на 4 минуты дольше, чем T1000 проходит 1 км. Значит, T100 проходит 4 км

дольше, чем T1000 проходит 1 км на 2 + 4 = 6 минут. Но по второму условию 4 км робот T100 проходит на 8 минут быстрее, чем T1000 проходит 8 км. Значит T1000 проходит 8 км на 6 + 8=14 минут быстрее, чем он же проходит 1 км. Значит, за 14 минут T1000 проходит 7 км, откуда его скорость равна 30 км/ч.

9. В коробке лежат 2024 шаров — белых, красных и чёрных. Белых втрое больше, чем красных. Количество чёрных шаров кратно 100, это больше, чем красных, но меньше, чем белых. Каким может быть количество чёрных шаров?

Ответ: 500, 600, 700 или 800.

Решение (с переменной). Пусть чёрных шаров $100t$. Тогда белых $3/4 \cdot (2024 - 100t) = 1518 - 75t$, красных — $1/4 \cdot (2024 - 100t) = 506 - 25t$.

Получаем соотношение $506 - 25t < 100t < 1518 - 75t$. Из первого неравенства получаем $t \geq 5$, из второго — $t \leq 8$. Значит, чёрных шаров 500, 600, 700 или 800.

Решение (без переменной). Количество чёрных шаров кратно 4.

Если чёрных шаров не менее 868, то белых не более 3/4 · (2024 – 868) = 867. Противоречие: белых должно быть больше. Значит, чёрных не более 864 штук.

Если чёрных шаров не более 404, то красных не менее 1/4 · (2024 – 404) = 405. Противоречие: красных должно быть меньше. Значит, чёрных не менее 408 штук.

Между 408 и 864 кратны 100 всего 4 числа: 500, 600, 700, 800. Не трудно проверить, что они подходят. Количества шаров в этих случаях показаны в таблице.

Красные	Белые	Чёрные
306	918	800
331	993	700
356	1068	600
381	1143	500

10. Группа товарищей-волонтеров решила купить некоторый предмет, чтобы помочь другой группе товарищей. Предмет стоил недешево — никак не меньше 170 центов, но и не больше 195. Товарищи договорились купить предмет вскладчину. Чтобы набрать точную сумму, все могли внести поровну центов. В последний момент двое товарищей отказались участвовать в проекте. Оказалось, что оставшимся теперь можно внести на 1 цент больше и нужная сумма в точности наберется. Сколько центов стоил предмет?

Ответ 180.

Решение. Пусть было $n + 2$, они хотели скинуться по t центов. Тогда из условия следует, что $(n + 2)t = n(t + 1)$, откуда $n = 2t$. Значит, предмет стоит $2t(t + 1)$

центов. Так как $170 \le 2t(t+1) \le 195$, то $85 \le t(t+1) \le 97$. Так как $8 \cdot 9 < 85$, $10 \cdot 11 > 97$, то подходить только $t = 9$. Тогда искомая сумма равна $2t(t+1) = 180$ центов

11. Вовочке дали задание перемножить два числа, одно из которых на 6 меньше другого. Вовочка выполнил задание, но учитель сказал ему, что он ошибся. «No way!» — подумал Вовочка и для проверки разделил свое произведение на меньшее число, и действительно, получил почему-то это же самое меньшее число, да еще 22 в остатке. Тогда он начал искать ошибку в умножении (молодец Вовочка, будьте как он!) и нашел — на самом деле в ответе цифра сотен должна быть больше на 2. А какой правильный ответ должен был получить Вовочка, выполняя задание учителя?

   Ответ: 1591.

   Решение. Пусть Вовочка перемножал числа x и $x+6$. Из условия следует, что Вовочка ошибся и получил результат $x(x+6) - 200$. С другой стороны, это число равно также $x^2 + 22$. Получаем: $x(x+6) - 200 = x^2 + 22$, откуда $x = 37$. Значит, перемножали числа 37 и 37 + 6 = 43, искомое произведение равно $37 \cdot 43 = 1591$.

12. Тимоша выставил в ряд 50 солдатиков. Среди них есть красные, синие, но может есть еще какие-то. Рядом с каждым красным солдатиком стоит синий. Красных на N штук больше, чем синих. При каком наибольшем N такое возможно?

   Ответ: 16.

   Решение. Сопоставим каждому синему солдату в подчинение одного или двух красных соседей так, чтобы каждый красный был в подчинении у одного синего. Например, при расстановке К, С, К, С, К, К, С, К, … можно сделать подчинение К-С, К-С-К, К-С-К, … или К-С-К, С-К, К-С-К, …. Искомое число N — количество синих солдат, у которых в подчинении два красных солдата. Назовём их супер-синими.

   Супер-синих не может быть более 50/3, иначе всего должно быть более 50 солдат. То есть супер-синих не более 16. Есть пример с 16 супер-синими солдатами: К-С-К, К-С-К, …, К-С-К, С-К — здесь 16 троек и еще 2 солдатика.

13. Тимоша выставил в ряд 50 солдатиков. Среди них есть красные, синие, жёлтые и зеленые, но может есть еще какие-то. Красных солдатиков в 2 раза больше, чем жёлтых. Рядом с каждым красным солдатиком стоит синий, рядом с каждым желтым — зеленый. Какое наибольшее количество красных солдатиком может быть в таком ряду?

   Ответ: 22.

   Решение. Пусть у Тимоши x желтых и $2x$ красных солдатиков. Каждый зеленый солдатик соседствует не больше, чем с двумя жёлтыми, поэтому зеленых хотя бы $x/2$. Аналогично, синих хотя бы x штук. Тогда $x + 2x + x/2 + x = 9x/2 \le 50$, откуда $x \le 11$. Пример при $x = 11$ существует: сначала поставим 11 раз тройку КСК, потом 5 раз тройку ЖЗЖ, потом пару ЖЗ. При этом красных солдатиков $2x = 22$ штук.

14. Два курьера каждое утро одновременно в одно и то же время выходят из двух пунктов навстречу друг другу для обмена корреспонденцией. Но вчера первый вышел на 6 минут раньше, а второй вовремя; их встреча произошла на 2 минуты раньше обычного. Сегодня второй курьер вышел на 9 минут раньше обычного, а первый вышел вовремя. На сколько минут раньше произойдет их встреча? Каждый из курьеров идёт каждый день на встречу с одной и той же скоростью, скорости курьеров могут отличаться.

   Ответ: 4.

   Решение. Второй курьер шёл на 2 минуты меньше не дошел до обычного места встречи расстояние S, значит, расстояние S он проходил обычно за 2 минуты.

   Первый наоборот, прошел лишнее расстояние S, и шёл на 6 – 2 = 4 минуты дольше обычного, значит, расстояние S он проходит за 4 минуты.

   Значит, скорость второго курьера в 4 : 2 = 2 раза больше скорости первого.

   Если второй курьер выйдет на 9 минут раньше, встреча произойдет на t минут раньше, то расстояние R, которое первый не дойдет до места встречи, он обычно проходит за t минут, а второй за 9 – t минут. Из отношения их скоростей имеем $t = 2(9 - t)$, откуда $t = 6$.

15. Два курьера каждое утро одновременно в одно и то же время выходят из двух пунктов навстречу друг другу для обмена корреспонденцией. Вчера первый вышел на 6 минут раньше, а второй вовремя; их встреча произошла на 2 минуты раньше обычного. Сегодня первый курьер вышел на 9 минут позже, а второй вовремя. На сколько минут позже произойдет их встреча? Каждый из курьеров идёт каждый день на встречу с одной и той же скоростью, скорости курьеров могут отличаться.

   Ответ: 3.

   Решение. Когда первый вышел позже на 9 минут, аналогично ситуации, когда второй вышел раньше на 9 минут, но со сдвигом во времени на 9 минут. Если там встреча произошла на 6 минут раньше, значит, тут будет на 9 – 6 = 3 минуты позже.