Блок 6. Площади и теорема Пифагора

Подготовительное занятие

Задания

1. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин наибольшей и наименьшей из его диагоналей.

2. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на длину перпендикуляра, опущенного на нее из середины другой боковой стороны.

3. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD. Доказать, что для того, чтобы площади треугольников AOB и DOC были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые BC и AD были параллельны.

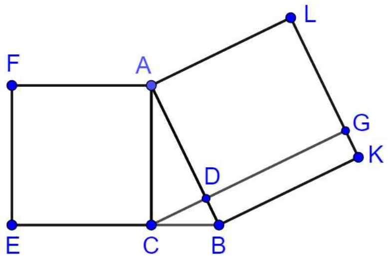
4. В треугольнике ABC на продолжении стороны AB выбрана точка K так, что $AB = BK$, а на стороне AC — точка P так, что $AP : PC = 1 : 3$. Найти площадь треугольника APK, если площадь треугольника ABC равна 1.

- *Теорема Пифагора*. В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

  Известно много доказательств этой теоремы. Одно из них вытекает из результата следующей задачи.

5. Дан прямоугольный треугольник ABC, угол C — прямой. Вне его построены квадраты $ACEF$ и $ABKL$. Прямая, проходящая через вершину C перпендикулярно AB, пересекает AB и KL в точках P и Q. Докажите равенство площадей $ACEF$ и $APQL$.

   Как из результата этой задачи следует утверждение теоремы Пифагора?



6. Даны точки A и B, а также число d. Найдите геометрическое место точек X, для которых выполнено $AX^2 - BX^2 = d$.

7. (а) Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.

   (б) Имеются четыре палочки. Известно, что из них можно сложить четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Докажите, что из них можно сложить четырёхугольник с двумя прямыми углами.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2022–2023 учебный год

Блок 6. Площади и теорема Пифагора

Подготовительное занятие

Задания

1. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин наибольшей и наименьшей из его диагоналей.

2. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на длину перпендикуляра, опущенного на нее из середины другой боковой стороны.

3. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD. Доказать, что для того, чтобы площади треугольников AOB и DOC были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые BC и AD были параллельны.

4. В треугольнике ABC на продолжении стороны AB выбрана точка K так, что $AB = BK$, а на стороне AC — точка P так, что $AP : PC = 1 : 3$. Найти площадь треугольника APK, если площадь треугольника ABC равна 1.

- *Теорема Пифагора*. В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

  Известно много доказательств этой теоремы. Одно из них вытекает из результата следующей задачи.

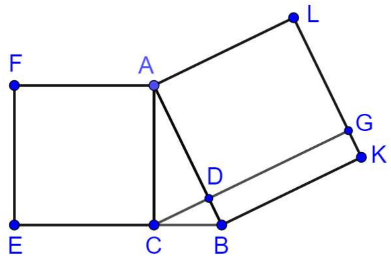
5. Дан прямоугольный треугольник ABC, угол C — прямой. Вне его построены квадраты $ACEF$ и $ABKL$. Прямая, проходящая через вершину C перпендикулярно AB, пересекает AB и KL в точках P и Q. Докажите равенство площадей $ACEF$ и $APQL$.

   Как из результата этой задачи следует утверждение теоремы Пифагора?

6. Даны точки A и B, а также число d. Найдите геометрическое место точек X, для которых выполнено $AX^2 - BX^2 = d$.

7. (а) Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.

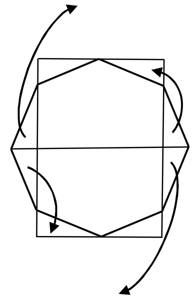
   (б) Имеются четыре палочки. Известно, что из них можно сложить четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Докажите, что из них можно сложить четырёхугольник с двумя прямыми углами.

karusel.desc.ru ~ 252 ~


Решения и указания

Предлагается набор геометрических задач, связанные с площадями фигур и теоремой Пифагора. Задачи первой половину демонстрируют разные методы работы с площадями, вторая часть — теорема Пифагора и факты, вытекающие из неё. При решении заданий избегается использование подобия фигур.

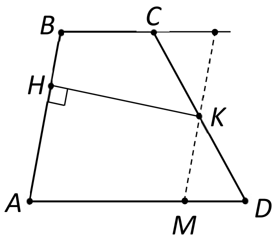
1. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин наибольшей и наименьшей из его диагоналей.



Указание. Прямоугольник и восьмиугольник, изображенные на рисунке, равновелики, так как пары треугольников, отмеченные на этом рисунке стрелками, равны.

Большая и меньшая стороны прямоугольника, очевидно, равны наибольшей и наименьшей диагонали восьмиугольника соответственно. Площадь прямоугольника, а, значит, и площадь восьмиугольника, таким образом, равна произведению наибольшей и наименьшей диагоналей восьмиугольника.

2. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на длину перпендикуляра, опущенного на нее из середины другой боковой стороны.



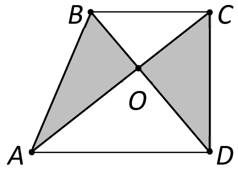
Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AD и BC, точка K — середина стороны CD и KH — перпендикуляр, опущенный на прямую AB. Проведем через точку K прямую, параллельную прямой AB. Пусть M и P — точки ее пересечения с прямыми AD и BC. Согласно свойству площадей параллелограмм $ABPM$ равновелик данной трапеции, так как пятиугольник $ABCKM$ является для них общим, а треугольники CKP и MKD равны. Таким образом, параллелограмм и трапеция составлены из одинаковых частей. Поскольку площадь параллелограмма равна произведению его основания AB на высоту KH, то утверждение доказано.

Комментарий. Последний абзац решения более формально можно переписать следующим образом:
$S_{ABPM} = S_{ABCKM} + S_{CPK}$,
$S_{ABCD} = S_{ABCKM} + S_{KMD}$ (по построению),
$\Delta KMD = \Delta CPK$ (по стороне и двум прилежащим углам) $\Rightarrow S_{KMD} = S_{CPK}$,
значит, $S_{ABPM} = S_{ABCD}$.

3. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD. Доказать, что для того, чтобы площади треугольников AOB и DOC были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые BC и AD были параллельны.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2022–2023 учебный год

Замечание. Для того, чтобы решить эту задачу, нужно доказать два утверждения: (1) если прямые BC и AD параллельны, то площади треугольников AOB и DOC равны; (2) если площади треугольников AOB и DOC равны, то прямые BC и AD параллельны.



Вообще, если нужно доказать утверждение: "Для того, чтобы выполнялось A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось B", то надо доказывать два утверждения: (1) "если верно A, то верно B"; (2) "если верно B, то верно A''. (Иногда вместо слов "необходимо и достаточно" употребляются слова "тогда и только тогда" или "утверждения A и B равносильны").

Решение. Докажем теперь оба сформулированных утверждения.

(1) Пусть прямые BC и AD параллельны. Рассмотрим треугольники ABD и ACD. Они имеют общее основание AD, а их высоты, опущенные на прямую AD из точек B и C, равны. Откуда следует, что $S_{ABD} = S_{ACD}$.

Тогда $S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD} = S_{ACD} - S_{AOD} = S_{COD}$.

(2) Пусть $S_{AOB} = S_{COD}$. Тогда $S_{ABD} = S_{ACD}$. Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD, значит, высоты, опущенные на прямую AD из точек B и C, также равны. Это означает, что прямые AD и BC параллельны.

Комментарий. Утверждение 1 можно переформулировать несколько иначе:

Пусть дан отрезок AB. Множество точек M (геометрическое место точек) таких, что площадь треугольника ABM равна заданной величине S, есть две прямые, параллельные отрезку AB и находящиеся от него на расстоянии $h = 2S/AB$.

Что представляет собой множество точек M плоскости, для которых что площадь треугольника ABM меньше заданной величины S, больше S?

4. В треугольнике ABC на продолжении стороны AB выбрана точка K так, что $AB = BK$, а на стороне AC — точка P так, что $AP : PC = 1 : 3$. Найти площадь треугольника APK, если площадь треугольника ABC равна 1.

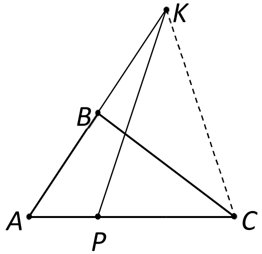
Указание. Для решения задачи можно использовать два утверждения, которые следуют из формулы для вычисления площади треугольника.

Если треугольники имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований (сторон на которые опущены высоты).

Если треугольники имеют одинаковые основания, то отношение их площадей равно отношению длин высот.

Ответ: 2/3.

Решение. Рассмотрим вспомогательный треугольник AKC. Треугольники ABC и AKC имеют общую высоту, опущенную из точки C, следовательно, $S_{AKC} : S_{ABC} = AK : AB = 2$. Значит, $S_{AKC} = 2$.



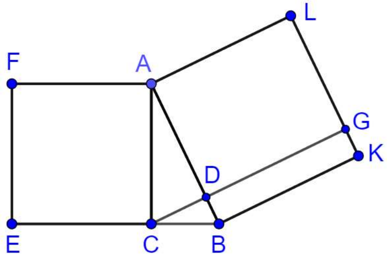
Треугольники AKC и AKP имеют общую высоту, опущенную из вершины K, следовательно $S_{AKC} : S_{AKP} = AC : AP = 3$.

Следовательно, $3 \cdot S_{AKP} = S_{AKC} = 2$, откуда $S_{APK} = 2/3$.

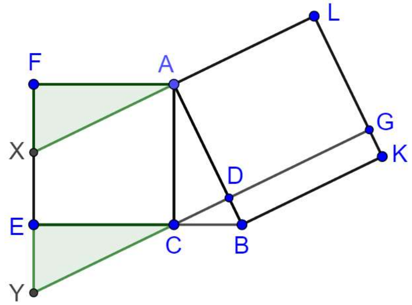
- *Теорема Пифагора*. В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

Известно много доказательств этой теоремы. Одно из них вытекает из результата следующей задачи.

5. Дан прямоугольный треугольник ABC, угол C — прямой. Вне его построены квадраты $ACEF$ и $ABKL$. Прямая, проходящая через вершину C перпендикулярно AB, пересекает AB и KL в точках P и Q. Докажите равенство площадей $ACEF$ и $APQL$.



Указания. Построим треугольники AFX и CEY, равные треугольнику ACB. Тогда CY лежит на прямой CD.

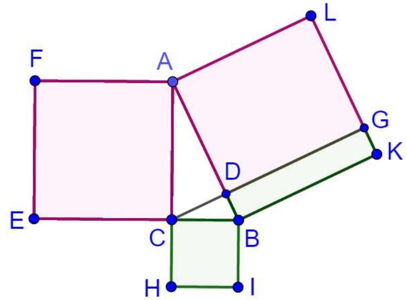


Получаем, что $S_{ACEF} = S_{ACYX}$ (у этих параллелограммов общая сторона AC и общая высота к этой стороне); $S_{ACYX} = S_{LGDA}$ (у этих параллелограммов равны стороны AX и AL, а также высоты к этим сторонам). Значит, $S_{ACEF} = S_{LGDA}$.

Комментарий. Это же утверждение следует из соотношения $AD \cdot AB = AC^2$, которое получается при изучении подобных треугольников, связанных с прямоугольным треугольником.

Как из результата этой задачи следует утверждение теоремы Пифагора?

Решение. Из предыдущей задачи $S_{ACEF} = S_{LGDA}$, аналогично $S_{BCHI} = S_{KGDB}$. Так как $S_{LGDA} + S_{KGDB} = S_{ABKL}$, то $S_{ACEF} + S_{BCHI} = S_{ABKL}$. Из этого следует, что $AC^2 + BC^2 = AB^2$.



6. Даны точки A и B, а также число d. Найдите геометрическое место точек X, для которых выполнено $AX^2 - BX^2 = d$.

Ответ: прямая, перпендикулярная AB.

Указание. Пусть X — некоторая точка, для которой $AX^2 - BX^2 = d$; точка Y — основание перпендикуляра, опущенного из X на прямую AB. Для прямоугольных треугольников AXY и BXY из теоремы Пифагора имеем $XY^2 = AX^2 - AY^2 = BX^2 - BY^2$, откуда $AY^2 - BY^2 = AX^2 - BX^2 = d$. Вывод: указанная разность для точки и её проекции на прямую AB одинакова. Значит, если точка лежит на искомом ГМТ, то ГМТ принадлежат все точки с той же проекцией, а значит, вся прямая, содержащая эту точку и перпендикулярная AB.

Остается заметить, что точки с разными проекциями дают разные разности квадратов, указанные в условии. Действительно, на разных перпендикулярах найдутся точки K и L, что $AK = AL$. Тогда если $AK^2 - BK^2 = AL^2 - BL^2 = d$, то $BK = BL$, откуда следует, что K и L лежат на одном перпендикуляре к AB.

7. (а) Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.

Решение. Если диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, то точки B и D лежат на одном перпендикуляре к AC. Из утверждения про ГМТ, данного выше, $BA^2 - BC^2 = DA^2 - DC^2$, откуда $BA^2 + DC^2 = DA^2 - BC^2$ (что и требовалось доказать).

Если для четырехугольника $ABCD$ выполнено $BA^2 + DC^2 = DA^2 - BC^2$, то имеет место $BA^2 - BC^2 = DA^2 - DC^2$, откуда точки B и D лежат на одном перпендикуляре к AC. Значит, диагонали AC и BD перпендикулярны.

(б) Имеются четыре палочки. Известно, что из них можно сложить четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Докажите, что из них можно сложить четырёхугольник с двумя прямыми углами.

Решение. Если из палочек длины a, b, c, d можно сложить четырехугольник, с перпендикулярными диагоналями, то $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Сложим два прямоугольных треугольника: один с катетами a и c, другой — с катетами b и d. По теореме Пифагора их гипотенузы равны. Приложив треугольники друг к другу гипотенузой, получим четырёхугольник с двумя прямыми углами.