Блок 4. Многоугольники

Подготовительное занятие

Задания

1. (а) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если каждый его внутренний угол не меньше 143° и не больше 146°.

   (б) Какое наибольшее число острых углов может встретиться в выпуклом многоугольнике?

2. (а) Сколько градусов составляет угол B ромба $ABCD$, если его высота BE ромба, опущенная на AD, делит сторону AD пополам?

   (б) Высота BE параллелограмма $ABCD$, опущенная на AD, делит сторону CD пополам. Сколько градусов составляет угол B параллелограмма, если $AB = 4BC$?

3. Какие из утверждений являются верными?

   (1) Если четырехугольник разбивается диагоналями на 4 равных треугольника, то этот четырехугольник — квадрат.

   (2) Если в параллелограмме нет тупых углов, то этот параллелограмм — прямоугольник.

   (3) Если в четырёхугольнике диагонали равны и перпендикулярны, то этот четырёхугольник является квадратом.

   (4) Если три угла четырёхугольника равны, а его диагонали перпендикулярны, то этот четырёхугольник является ромбом.

   (5) Если в четырехугольнике все пары биссектрис соседних углов пересекаются под прямым углом, то он является параллелограммом.

4. Точка X — середина средней линии трапеции с основаниями AB и CD.

   Какие из утверждений являются верными?

   (1) Диагонали трапеции могут пересекаться в точке X.

   (2) Если луч AX пересекает основание CD, то луч CX не пересекает основание AB.

   (3) Треугольник ABX может быть равнобедренным.

   (4) Треугольник BCX обязательно тупоугольный.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2022–2023 учебный год

5. Рассмотрим все четырехугольники $ABCD$, для которых верно следующее свойство: существует точка X, которая равноудалена от прямых AB и CD и равноудалена от прямых BC и AD. Какие из следующих утверждений являются верными?

   (1) Любой параллелограмм обладает таким свойством.

   (2) Таким свойством обладают только ромбы.

   (3) Таким свойством обладают некоторые трапеции.

   (4) Существует четырехугольник, у которого нет параллельных сторон, обладающий указанным свойством.

   (5) Существует невыпуклый четырёхугольник, обладающий таким свойством.

   (6) Существует такой четырехугольник, у которого несколько точек, обладающих тем же свойством, что и точка X.

Указания, ответы и решения

Занятие посвящено задачам, связанными с многоугольниками, в частности, с суммой углов многоугольников, свойства и признаками видов четырёхугольников.

В части заданий нужно понять, верно ли указанное утверждение. Такие задания, в частности, предлагались на некоторых интернет-каруселях. Рекомендуем выделить время, в течение которого ученики могут просто дать ответы, а затем обсудить результаты. Конечно, при выполнении таких заданий (когда ждут только ответ) порой выручает интуиция. В рамках занятия полезно подкрепить интуитивные представления либо доказательством (если ответ «да»), либо построением контрпримера (если ответ «нет»).

1. (а) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если каждый его внутренний угол не меньше 143° и не больше 146°.

   (б) Какое наибольшее число острых углов может встретиться в выпуклом многоугольнике?

   Указание. Полезно вспомнить следующие полезные факты. Сумма углов n-угольника равна $180°(n - 2)$; откуда сумма углов, смежных с углами выпуклого многоугольника, взятых по одному у каждой вершины, равна 360°.

   (а) Ответ: 10.

   Решение. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$, поэтому $143° \cdot n \le 180°(n - 2) \le 146° \cdot n$, откуда $9\frac{27}{37} \le n \le 10\frac{20}{37}$, чему удовлетворяет единственное целое число 10.

   (б) Ответ: 3.

   Решение. Сумма всех внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°. Поэтому выпуклый многоугольник не может иметь более трёх тупых внешних углов, то есть он не может иметь более трёх острых внутренних углов. Три острых угла могут быть, например, в треугольнике.

2. (а) Сколько градусов составляет угол B ромба $ABCD$, если его высота BE ромба, опущенная на AD, делит сторону AD пополам?

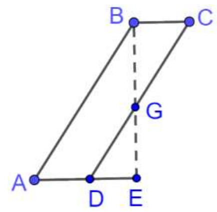
   Ответ: 120.

   Решение. В прямоугольном треугольнике ABE катет AE вдвое меньше гипотенузы AB, значит, его угол A равен 60°. Тогда искомый угол B ромба равен $180° - 60° = 120°$.

   (б) Высота BE параллелограмма $ABCD$, опущенная на AD, делит сторону CD пополам. Сколько градусов составляет угол B параллелограмма, если $AB = 4BC$?

   Ответ: 120.

   Указание. Постарайтесь сделать правдоподобный чертеж к задаче.

   Решение. Пусть $BC = a$, $AB = 4a$. Из свойств параллелограмма $AD = a$. Треугольники BCG и EDG равны (точка G — пересечение CD и BE): в них углы B и E — прямые, $DG = CG$ (по условию), углы при вершине G — равны (они вертикальные). Значит, $DE = BC = a$, $AE = AD + DE = a + a = 2a$. В прямоугольном треугольнике ABE катет AE вдвое меньше гипотенузы AB, значит, его угол A равен 60°. Тогда искомый угол B ромба равен $180° - 60° = 120°$.

3. Какие из утверждений являются верными?

   (1) Если четырехугольник разбивается диагоналями на 4 равных треугольника, то этот четырехугольник — квадрат.
   (2) Если в параллелограмме нет тупых углов, то этот параллелограмм — прямоугольник.
   (3) Если в четырёхугольнике диагонали равны и перпендикулярны, то этот четырёхугольник является квадратом.
   (4) Если три угла четырёхугольника равны, а его диагонали перпендикулярны, то этот четырёхугольник является ромбом.
   (5) Если в четырехугольнике все пары биссектрис соседних углов пересекаются под прямым углом, то он является параллелограммом.

   Ответ: 2, 5.

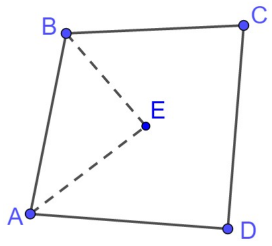
   Решение. Утверждение (1) не верно, так как любой ромб делится своими диагоналями на 4 равных треугольника.

   Утверждение (2) верно. Два соседних угла параллелограмма дают в сумме 180°. Если они оба не превосходят 90°, то каждый из них равен 90°. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

   Утверждение (3) не верно. Не сложно построить четырёхугольник, у которого диагонали равны, перпендикулярны, но не делят друг друга пополам. Такой четырёхугольник не является параллелограммом и, следовательно, не является квадратом.

   Утверждение (4) не верно. Приведем пример одного из четырёхугольников, являющегося контрпримером. Рассмотрим такую точку D вне равностороннего треугольника ABC, что $AD = BD$, $\angle ADB = 100°$. Тогда нетрудно найти углы: $\angle DAB = \angle DBA = 40°$, $\angle DAC = \angle DBC = 40° + 60° = 100°$. Пусть точка O — середина AB. Тогда DO и CO — перпендикуляры к AB (как высоты равнобедренных треугольников), откуда следует, что диагональ CD пересекает диагональ AB в точке O под прямым углом.

Утверждение (5) верно. Пусть дан четырёхугольник $ABCD$, биссектрисы его углов A и B пересекаются в точке E, $\angle AEB = 90°$. Тогда $\angle ABE + \angle BAE = 90°$, откуда $\angle ABC + \angle BAD = 180°$. Значит, стороны BC и AD параллельны. Аналогично из перпендикулярности биссектрис углов B и C доказывается параллельность сторон AB и CD. Получаем, что $ABCD$ — параллелограмм (по определению).



4. Точка X — середина средней линии трапеции с основаниями AB и CD.

Какие из утверждений являются верными?
(1) Диагонали трапеции могут пересекаться в точке X.
(2) Если луч AX пересекает основание CD, то луч CX не пересекает основание AB.
(3) Треугольник ABX может быть равнобедренным.
(4) Треугольник BCX обязательно тупоугольный.

Ответ: 2, 3.

Решение. Пусть точки E и F — середины боковых сторон AD и BC, то есть точка X — середина EF.

Утверждение (1) не верно. Никакая диагональ трапеции не может проходить через середину её средней линии. Если диагональ BD проходит через точку X, то FX — средняя линия треугольника BCD, откуда $CD = 2XF = EF$. Но, как известно, $2EF = CD + AB$, откуда $AB = EF = CD$, то есть $ABCD$ — параллелограмм, а не трапеция. Противоречие.

Утверждение (2) верно. Если луч AX пересекает основание CD в точке Y, то EX — средняя линия треугольника ADY. Тогда, повторяя рассуждения выше, получаем, что $EF = DY < CD$. Так как $2EF = CD + AB$ и $CD >$ EF, то $AB < EF$. Если бы луч CX пересекал основание AB, то аналогично получили бы $AB > EF$. Противоречие.

Утверждение (3) верно. Не трудно доказать, что в равнобокой трапеции $AX = BX$.

Утверждение (4) не верно. Интуитивно, например, понятно, что если взять прямоугольник $ABCD$, у которого AB и CD сильно больше BC и AD, то треугольник BCX будет остроугольным (так как он равнобедренных с острым углом при вершине X). Если немного придвинуть друг к другу вершины A и B, то прямоугольник станет трапецией, а BCX останется остроугольным треугольником. Но такой пример сложно строго обосновать.

Приведем другой пример. Существует равнобокая трапеция, в которой биссектрисы углов пересекаются в точке X (такая трапеция описана около окружности). Биссектрисы углов B и C перпендикулярны, значит, треугольник BCX не является тупоугольным.

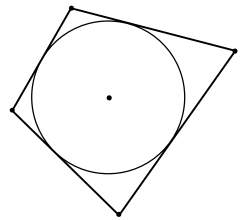
5. Рассмотрим все четырехугольники $ABCD$, для которых верно следующее свойство: существует точка X, которая равноудалена от прямых AB и CD и равноудалена от прямых BC и AD.

Какие из следующих утверждений являются верными?
(1) Любой параллелограмм обладает таким свойством.
(2) Таким свойством обладают только ромбы.
(3) Таким свойством обладают некоторые трапеции.
(4) Существует четырехугольник, у которого нет параллельных сторон, обладающий указанным свойством.
(5) Существует невыпуклый четырёхугольник, обладающий таким свойством.
(6) Существует такой четырехугольник, у которого несколько точек, обладающих тем же свойством, что и точка X.

Ответ: 1, 3, 4, 5, 6.

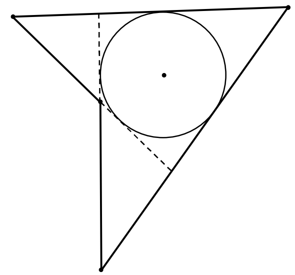
Решение. На самом деле, верен следующий факт: точка, обладающая указанными свойствами, существует для любого четырехугольника, причем она единственная только для параллелограмма и равнобокой трапеции.

(1) Такой точкой для параллелограмма является его центр — нетрудно доказать, что он равноудалён от противоположных сторон.



(2) Это утверждение не верно, так как оно противоречит верному утверждению (1).

(3) Например, в равнобокой трапеции указанным свойством обладает середина средней линии трапеции.



(4)+(5) Рассмотрим четырехугольник, ограниченный четырьмя касательными к одной окружности. Центр этой окружности относительно четырёхугольника будет обладать указанными свойствами. При этом четырёхугольник может быть как выпуклым, так и невыпуклым (см. рисунки справа).

(6) Для двух непараллельных прямых точки, равноудаленные от них, составляют[1] «крест» — две перпендикулярные прямые, являющиеся биссектрисами углов, образуемых при пересечении данных прямых. Рассмотрим два «креста» для двух пар прямых AB и CD, BC и AD. Любая точка в пересечении крестов обладает указанными в условии свойствами — таких точек может быть четыре.

[1] Иными словами, геометрическое место таких точек есть пара перпендикулярных прямых.