Блок 3. Графы

Подготовительное занятие

Задания

- Метро города *N* сразу после открытия было устроено так: его линии связывают станции Вируснякии — Карантиново, Дистантная — Самоизоляционная, Карантиново — Ковидово, Ковидово — Вирусняки, Масочная — Карантиново, Масочная — Вирусняки, Чихаево — Дистантная и Перчатники — Чихаево. Можно ли добраться на метро от Масочной до Перчатников?

- После перестройки у метро города *N* было 9 станций. Из 4 станций выходило 3 перегона, из остальных — по 4 перегона. Сколько всего перегонов тогда было в метро города *N*?

- Сейчас метро города *N* устроено так, что в нём 11 станций. Какие-то перегоны сохранились, какие-то закрыли, но от любой станции можно доехать, возможно с пересадками, до любой другой.

  (а) Какое наименьшее число перегонов может быть в таком метро?

  (б) Может ли быть кольцевой маршрут, если в метро всего 10 перегонов?

1. В графе вершины пронумерованы числами от 2 до 10, причем вершины соединены ребром, если числа, записанные в них, не взаимно просты. Сколько компонент связности в этом графе?

2. Петя располагает на плоскости 4 прямые. Затем он рисует граф, вершины которого соответствуют прямым, а ребром соединены вершины, соответствующие пересекающимся прямым. Нарисуйте все графы, которые у него могут получиться.

3. Между любыми двумя соседними клетками шахматной доски лежит спичка. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы ладья могла попасть за несколько ходов из любой клетки в любую другую, не перескакивая через спички?

4. Граф состоит из 15 вершин. Какие из утверждений являются верными?
   (а) Если две вершины имеют степень 7, то они связаны путем по ребрам.
   (б) Если две вершины имеют степень 7, то граф связный.
   (в) Если в графе 13 ребер, то он может быть связным.
   (г) Если в графе 90 ребер, то он обязательно связный.
   (д) Если в графе 95 ребер, то он обязательно связный.

5. В графе вершину степени 1 называют *висячей*. В дереве есть 8 вершин степени три, 10 вершин степени 4 и несколько висячих вершин. Других вершин нет. Найти число висячих вершин.

6. В графе 18 вершин, из которых 10 вершин степени 1 и 8 вершин степени 3. Докажите, что в этом графе нет цикла.

7. В стране 15 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если одна из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет из любого города добраться до любого другого (возможно с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

Указания, ответы и решения

Занятие посвящено графам. Рассмотрены задания про связные графы, ориентированные, и эйлеровы. Первые задания — про понятие графа. Их особенно важно рассматривать с учениками, которые ранее не сталкивались с графами.

Во всех заданиях будет идти речь о *простых графах*, в которых любая пара различных вершин либо соединена ребром, либо нет. Следовательно, в рассматриваемых графах нет кратных ребер, нет петель.

При разборе первого задания (с точкой) стоит обсудить, что такое (1) *граф*, (2) *вершины* графа, (3) *ребра* графа, (4) *степень вершины*, (5) *связный* граф, (6) *компонента связности*. В комментарии к заданию даны определения и дополнительные вопросы для обсуждения.

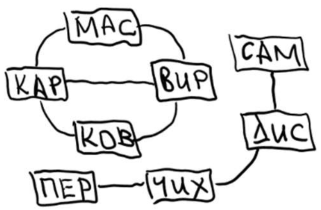
Во втором задании (с точкой) показывается *способ подсчёта числа ребер* через степени вершин графа.

При разборе третьего задания (с точкой) предлагается рассмотреть понятие *дерева*, как одного из видов графов. В комментариях приводятся свойства деревьев и свойства графов, компоненты связности которых — деревья.

- Метро города N сразу после открытия было устроено так: его линии связывают станции Вируснякии — Карантиново, Дистантная — Самоизоляционная, Карантиново — Ковидово, Ковидово — Вируснякии, Масочная — Карантиново, Масочная — Вируснякии, Чихаево — Дистантная и Перчатники — Чихаево. Можно ли добраться на метро от Масочной до Перчатников?

Ответ: нельзя.

Указание. Удобно нарисовать схему, подобную показанной на рисунке справа.



Дополнительно можно обсудить следующие вопросы.

✓ Сколько всегда станций метро в городе N?

Ответ: 8.

✓ Сколько всего переездов в метро города N?

Ответ: 8.

✓ Сколько групп станций, в каждой из которых можно добраться от каждой станции до любой другой?

Ответ: 2.

Комментарий. Такие схемы называют *графами*. Они состоят из объектов (здесь — станции), которые называют *вершинами* и обычно обозначают точками, и линий, которые называют *ребрами* графа, каждая из которых соединяет какие-то две вершины. Заметим, важно только то, какие вершины соединены, а какие — нет. Не важно расположение на рисунке этих вершин, форма линий (прямые, кривые, пересекают друг друга или нет).

Граф называется *связным*, если любые две его вершины соединены путем — цепочкой последовательных ребер. Здесь граф состоит из двух частей, каждая из которых связна. Такие части называют *компонентами связности* графа.

✓ Какое наибольшее число перегонов выходит от станции в метро города N?

Ответ: 3.

Комментарий. Для вершины графа определено число — количество выходящих из неё ребер. Его называют *степенью вершины*.

✓ (а) Сколько пар связанных (пусть с пересадкой) между собой станций? (б) Сколько пар не связанных между собой станций?

Ответ: (а) 12, (б) 16.

(а) Решение. В каждой компоненте связности по 4 вершины, пар вершин, связанных путем, — $4 \cdot 3 : 2 = 6$. Всего 12 пар.

(б) Решение. Не связаны путем вершины из разных компонент. Таких пар $4 \cdot 4 = 16$.

- После перестройки у метро города N было 9 станций. Из 4 станций выходило 3 перегона, из остальных — по 4 перегона. Сколько всего перегонов тогда было в метро города N?

Ответ: 16

Решение. Всего со станций выходит $4 \cdot 3 + (9 - 4) \cdot 4 = 12 + 20 = 32$ концов перегонов. Каждому перегону соответствуют 2 таких конца. Поэтому перегонов $32 : 2 = 16$.

Комментарий. Здесь демонстрируется важное умение — *подсчёт числа ребер* графа, если известны степени его вершин. Правило звучит так: сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер. Отсюда, в частности, следует, что сумма степеней вершин графа всегда чётна. Например, не существует графа с 15 вершинами, степени которых равны нечетному числу.

- Сейчас метро города N устроено так, что в нём 11 станций. Какие-то перегоны сохранились, какие-то закрыли, но от любой станции можно доехать, возможно с пересадками, до любой другой.

(а) Какое наименьшее число перегонов может быть в таком метро?

(б) Может ли быть кольцевой маршрут, если в метро всего 10 перегонов?

(а) Ответ: 10.

Решение. Пусть некто Вася каждый день спускается на одну и ту же станцию. Он имеет цель побывать на всех станциях.

Чтобы попасть на 2-ю станцию, ему надо проехать 1 перегон. Чтобы к тем станциям, на которые он уже приезжал, добавить еще одну, надо проехать по перегону, по которому он еще не проезжал. Значит, чтобы к той станции, на которой «живет Вася», добавить оставшиеся 10 станций, надо иметь как минимум 10 перегонов.

Примеры, когда все 11 станций связаны 10 перегонами, очевидны. Например, станции могут быть расположены «на одной линии», или 10 станций соединены с какой-то одной.

(б) Ответ: нет, не может.

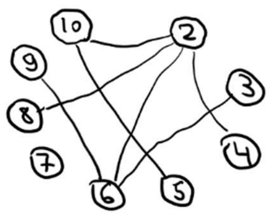
Решение. Предположим, кольцевой маршрут имеется. Если в нём закрыть один из перегонов, то станции останутся связанными перегонами. Тогда согласно пункту (а) должно остаться 10 перегонов. Противоречие, из которого следует, что кольцевого маршрута нет.

Комментарий. В задаче идёт речь о графах, которые называют *деревьями*. Они связные, имеют минимальное возможное для связности количество ребер, в них нет циклов.

Результат пункта (а) нетрудно обобщить на произвольное число вершин: в любом дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребер.

1. В графе вершины пронумерованы числами от 2 до 10, причем вершины соединены ребром, если числа, записанные в них, не взаимно просты. Сколько компонент связности в этом графе?

Ответ: 2



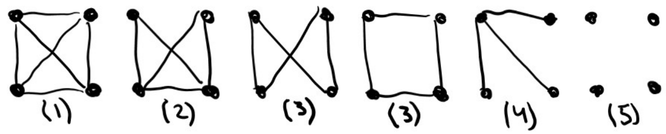
Решение. Вершина, соответствующая числу 7, не соединена ни с какой другой. От вершины «2» отходят ребра в вершины «4», «6», «8», «10». Вершина «5» соединена с вершиной «10», вершины «3» и «9» соединены с вершиной «6». Эти ребра показаны на рисунке справа. Также есть еще другие ребра, но для вывода о числе компонент связности этого достаточно.

2. Петя располагает на плоскости 4 прямые. Затем он рисует граф, вершины которого соответствуют прямым, а ребром соединены вершины,

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2022–2023 учебный год

соответствующие пересекающимся прямым. Нарисуйте все графы, которые у него могут получиться.

Решение. Рассмотрим, каковы могут быть группы параллельных прямых: (1) либо их нет, (2) либо 1 пара, (3) либо 2 пары, (4) либо 3 параллельных друг другу, (5) либо все параллельны.

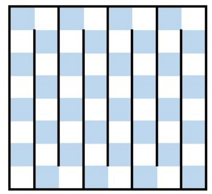


В первом случае есть ребра между любой парой вершин. Во втором — пропадает 1 ребро. В третьем — два ребра, не имеющих общую вершину (любой граф можно изобразить по-разному, здесь этот граф нарисован 2 способами). В четвертом случае 1 прямая пересекает три другие, то есть в графе одна вершина соединена с тремя другими. В пятом случае ребер нет.

Комментарий. С точки зрения графов, два варианта изобразить третий случай — это один и тот же граф. В графе важно кто с кем соединен, а не то, как расположены на рисунке сами вершины или ребра. В разных картинках узнать один и тот же граф иногда не очень просто.

3. Между любыми двумя соседними клетками шахматной доски лежит спичка. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы ладья могла попасть за несколько ходов из любой клетки в любую другую, не перескакивая через спички?

Ответ: 63.



Решение. Чтобы получить группу из 2-ух клеток, по которым может ходить ладья, надо убрать 1 спичку. Чтобы к такой группе добавить 1 клетку, надо убрать еще спичку. В итоге, чтобы к 1 клетке добавить оставшиеся 63 клетки, надо убрать 63 спички.

На рисунке справа показан пример, как связать все клетки, убрав 63 спички.

Комментарий. Это же решение можно изложить в терминах графов.

Рассмотрим граф, вершины которого — клетки, ребрами соединены вершины, соответствующие соседним клеткам, между которыми нет спички. Чтобы ладья могла с любой клетки попасть на любую другую, граф должен быть связными. Связный граф с наименьшим числом ребер — дерево. В нем ребер на 1 меньше числа вершин. Вершин — 64, ребер — 63. Каждому ребру соответствует убранная спичка.

4. Граф состоит из 15 вершин. Какие из утверждений являются верными?
(а) Если две вершины имеют степень 7, то они связаны путем по ребрам.
(б) Если две вершины имеют степень 7, то граф связный.
(в) Если в графе 13 ребер, то он может быть связным.
(г) Если в графе 90 ребер, то он обязательно связный.
(д) Если в графе 95 ребер, то он обязательно связный.

Ответ: верные утверждения — (а) и (д).

(а) Решение. Кроме указанных двух вершин степени 7 есть еще $15 - 2 = 13$ вершин. Так как $13 < 7 + 7$, то среди этих 13 вершин будет вершина, связанная ребрами с указанными двумя. Значит, данные вершины связаны путем, проходящим через эту вершину.

(б) Решение. Не обязательно граф связный. Например, может быть 7 вершин, каждая из которых связана с указанными в условии двумя вершинами, а остальные $15 - 7 - 2 = 6$ вершин — изолированные (не связанные с другими ребрами).

(в) Решение. Как выше доказано, чтобы граф с 15 вершинами был связным, нужно не менее $15 - 1 = 14$ ребер. Если ребер меньше, то он не связный.

(г) Решение. Если в графе любые 2 вершины из 14 связаны ребром, то будет $14 \cdot 13 : 2 = 91$ ребро. Значит, можно провести 90 ребер так, что одна из 15 вершин будет изолированной. Такой граф несвязный.

(д) Решение. Если провести все ребра между 15 вершинами графа, то их будет $15 \cdot 14 : 2 = 105$ штук. Чтобы граф стал несвязным, нужно убрать все ребра между некоторыми n вершинами и оставшимися $15 - n$ вершинами (здесь n от 1 до 7) — всего $n(15 - n)$ штук. Не трудно проверить, что при любых из указанных значений n это количество больше, чем $105 - 95 = 10$.

5. В графе вершину степени 1 называют *висячей*. В дереве есть 8 вершин степени три, 10 вершин степени 4 и несколько висячих вершин. Других вершин нет. Найти число висячих вершин.

Ответ: 30.

Решение. Пусть в графе n висячих вершин. Удвоенное число ребер равно $8 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + n = 64 + n$, число вершин равно $8 + 10 + n = 18 + n$. В дереве число ребер на 1 меньше числа вершин. Получаем уравнение $(64 + n) : 2 + 1 = 18 + n$, откуда $n = 30$.

6. В графе 18 вершин, из которых 10 вершин степени 1 и 8 вершин степени 3. Докажите, что в этом графе нет цикла.

Указание: найдите количество ребер этого графа и докажите, что он является деревом.

Решение. Сумма степеней вершин равна $10 + 3 \cdot 8 = 34$, значит, количество ребер — $34 : 2 = 17$. Если в связном графе количество ребер на 1 меньше числа вершин, то оно является деревом. В дереве нет циклов.

Замечание. Факты (способ подсчёта числа ребер и признак дерева) были доказаны выше.

7. В стране 15 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если одна из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет из любого города добраться до любого другого (возможно с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

Ответ: 21 авиалиния.

Решение. Обозначим количество линий у авиакомпаний через a, b и c. Если мы закрыть авиалинии одной компании, то граф останется связным. В связном графе с 15 вершинами не менее 14 ребер. Поэтому $a + b \geq 14$, $b + c \geq 14$, $c + a \geq 14$.

Складывая эти неравенства, получаем: $2(a + b + c) \geq 42$, то есть у трёх компаний в сумме не менее 21 авиалинии. Осталось привести пример с 21 авиалинией. Годится любой из примеров, показанных на рисунках.