Блок 2. Множества

Подготовительное занятие

Задания

✓ Дополнение множества A — это множество элементов, не содержащихся в A, обозначается $\bar{A}$.

✓ Объединение множеств A и B — множество, содержащее в себе все элементы обоих множеств A и B, обозначается $A \cup B$.

✓ Пересечение множеств A и B — множество, которому принадлежат только те элементы, которые одновременно принадлежат A и B, обозначается $A \cap B$. В частности, если множества A и B не имеют общих элементов, то $A \cap B = \varnothing$.

✓ Разность множеств A и B — это множество, в которое входят все элементы первого множества, не входящие во второе множество, обозначается $A \backslash B$.

- Даны множества целых чисел $A = \{x | -3 < x \le 5\}$, $B = \{x | -1 < x \le 13\}$.
  (а) Выпишите элементы каждого из множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$.
  (б) Найдите $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$, $\lceil A \cap B \rceil$, $|A \backslash B|$.
  (в) Выпишите элементы множества $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

- На входе в торговый центр посетители обычно берут либо одну маску, либо одну пару перчаток, либо одну маску и одну пару перчаток. За час было разобрано 108 масок и 99 пар перчаток. Сколько было посетителей в этот час, если 65 человек взяли и маску, и две перчатки?

- Вечером 38 мальчиков обсуждали компьютерные игры. Оказалось, что в Ведьмака любят играть 12 мальчиков, в Fallout — 22 мальчика. При этом в Ведьмака и Fallout — 7 мальчиков, Fallout и NFS — 9 мальчиков, в NFS и Ведьмака — 5 мальчиков, во все три игры — двое, а один вообще не любит никакие игры. Скольким мальчикам нравится играть в NFS?

1. Задайте перечислением множество, элементы которого
   (а) двузначные числа, являющиеся точными квадратами;
   (б) параллелограммы с целыми сторонами периметра 10.

2. Сколько элементов в множестве $A = X \cap \mathbb{Z}$, где $X = \{-\sqrt{7} \le x \le \sqrt{127}/11\}$, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел?

3. Клоуны играли в прятки детьми. Всего было 36 детей. Из них двое не прятались ни в подвале, ни в магазине, ни в цирке. В подвале за всё время пряталось 25 ребят, в магазине — 11, а в цирке 17 ребят; и в подвале, и в магазине — 6; и в подвале, и в цирке — 10; и в цирке, и в магазине — 4. Сколько детей пряталось во всех трёх местах?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2022–2023 учебный год

4. Найдите все числа, удовлетворяющие условиям:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x^2+3)(x+3)^2 = 0 \\ (|x-2|-3)\cdot(x^3-9x) = 0 \end{cases} \\ x^3 - 2x^2 = -x \end{array}\right.$$

5. На плоскости нарисованы перекрывающиеся квадрат и круг. Вместе они занимают площадь 1966 см². Площадь пересечения составляет 85 см². Площадь круга равна 1322 см². Чему равен периметр квадрата?

6. Нескольким ребятам раздали по три карточки. На некоторых написана цифра «5», на остальных — «7». Оказалось, что число «55» могут сложить из своих карточек 25 ребят, число «77» — 17 ребят, а число «57» — 8 ребят. Сколько ребят получили три одинаковые карточки?

Блок 2. Множества

Подготовительное занятие

Указания, решения, ответы

Занятие посвящено понятию множества (в том числе их обозначениям), операциям над множествами, примерам из разных разделов математики, формуле включения-исключения.

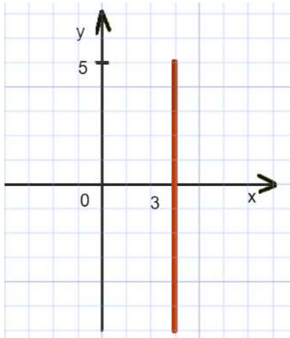
Множество — это набор каких-то элементов, о которых хочется говорить, как об одном целом. Они могут быть связаны некоторым свойством, а могут объединяться только тем, что их про них вместе говорят как про одно множество.

Множество можно задать по-разному.

Если множество содержит небольшое число элементов, то его можно задать перечислением элементов. Принято записывать так: $A = \{-2;\ 0;\ m;\ \sqrt{3/7};\ 3{,}4\}$. То, что элемент принадлежит множеству, записывают так: $\sqrt{3/7} \in A$. Количество элементов конечного множества обозначают $|A|$. В приведенном примере $|A| = 5$.

Если есть общее свойство, определяющее его состав, то множество можно описать свойством. Например, так: множество B состоит из всех тупоугольных треугольников на плоскости.

Множество C пар действительных чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющих условиям $\begin{cases} y \le 5 \\ x = 3 \end{cases}$, можно изобразить на координатной плоскости. Заданное множество будет состоять из точек координатной плоскости, принадлежащих красному лучу с началом в точке (3; 5), как показано на рисунке справа. Также такое множество можно записать следующим образом: $C = \{(x; y) | x = 3, y \le 5\}$.



Также множеством является набор, в котором нет элементов. Его называют пустым множеством и обозначают символом $\varnothing$.

Самые популярные операции с множества следующие.

✓ Дополнение множества A — это множество элементов, не содержащихся в A, обозначается $\bar{A}$.

✓ Объединение множеств A и B — множество, содержащее в себе все элементы обоих множеств A и B, обозначается $A \cup B$.

✓ Пересечение множеств A и B — множество, которому принадлежат только те элементы, которые одновременно принадлежат A и B, обозначается $A \cap B$. В частности, если множества A и B не имеют общих элементов, то $A \cap B = \varnothing$.

✓ Разность множеств A и B — это множество, в которое входят все элементы первого множества, не входящие во второе множество, обозначается $A \backslash B$.

- Даны множества целых чисел $A = \{x | -3 < x \le 5\}$, $B = \{x | -1 < x \le 13\}$.
  (а) Выпишите элементы каждого из множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$.
  (б) Найдите $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$, $\lceil A \cap B \rceil$, $|A \backslash B|$.
  (в) Выпишите элементы множества $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

  Указание. Можно выписать элементы множеств:
  $A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$,
  $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$.

  (а) Решение. Можно выписать элементы множеств:
  $A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$,
  $A \cap B = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$,
  $A \backslash B = \{-2; -1\}$.

  (б) Ответ: $|A| = 8$, $|B| = 14$, $|A \cup B| = 16$, $\lceil A \cap B \rceil = 6$, $|A \backslash B| = 2$

  Указание. Обратите внимание, что $|A \cup B| = |A| + |B| - \lceil A \cap B \rceil$.

  (в) Ответ: $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{-2; -1; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$.

  Указание: выпишите сначала элементы $A \backslash B$, а затем — элементы $B \backslash A$.

- На входе в торговый центр посетители обычно берут либо одну маску, либо одну пару перчаток, либо одну маску и одну пару перчаток. За час было разобрано 108 масок и 99 пар перчаток. Сколько было посетителей в этот час, если 65 человек взяли и маску, и две перчатки?

  Ответ: 142.

  Решение. В сумму 108 + 99 = 207 по одному разу входят те, кто взят только маску или только перчатки, и дважды входят те, кто взял и то, и другое. Значит, всего было 207 – 65 = 142 посетителя.

  Комментарий. Заметим, подсчёт идёт согласно соотношения, называемой формулой включения-исключения для двух множеств: $|A \cup B| = |A| + |B| - \lceil A \cap B \rceil$, где A — множество тех, кто взял маску, B — множество тех, кто взял перчатки.

- Вечером 38 мальчиков обсуждали компьютерные игры. Оказалось, что в Ведьмака любят играть 12 мальчиков, в Fallout — 22 мальчика. При этом в Ведьмака и Fallout — 7 мальчиков, Fallout и NFS — 9 мальчиков, в NFS и Ведьмака — 5 мальчиков, во все три игры — двое, а один вообще не любит никакие игры. Скольким мальчикам нравится играть в NFS?

Ответ: 23.

Указание. Кроме разных расчётов, используя круги Эйлера, нужно показать способ, указанный далее в решении.

Решение. Пусть игра NFS нравится n мальчикам. Тогда в сумму $12 + 22 + n = 34 + n$ любители только одной из игр входят 1 раз, любители ровно двух игр — 2 раза, любители всех трёх игр — 3 раза.

Если из $34 + n$ убрать пересечения по 2 играм (7, 9 и 5), то любители ровно двух игр будут учитываться 2 – 1 = 1 раз, любителей всех трёх игр вычтут 3 раза (то есть, они вообще не учитываются). Значит, всего любят хоть какие-то игры $(34 + n) - (5 + 7 + 9) + 2 = 15 + n$ или $38 - 1 = 37$ человек. Из соотношения $15 + n = 37$ получаем $n = 22$.

Комментарий. Заметим, что расчёты в решении соответствуют формуле включения-исключения для трёх множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| -$$
$$-|A_1 \cap A_2| - |A_3 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| +$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

- В предыдущих двух упражнениях полезно нарисовать круги-диаграммы Эйлера. Заметим, что при сложении числа элементов всех множеств те элементы, которые содержатся ровно в двух множествах, войдут в эту сумму дважды; те элементы, которые содержатся ровно в трех множествах — трижды.
- Найти число всех элементов всех множеств, необходимо из суммы вычесть все повторения. В случае двух множеств формула для этого числа будет выглядеть так:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

- В случае трех множеств формула будет несколько сложнее. Вычитая числа элементов во всех попарных пересечениях, мы так же вычтем число элементов, содержащихся во всех трех множествах, поэтому необходимо его добавить:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| -$$
$$-|A_1 \cap A_2| - |A_3 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Задайте перечислением множество, элементы которого

   (а) двузначные числа, являющиеся точными квадратами;

   (б) параллелограммы с целыми сторонами периметра 10.

   (а) Ответ: {16; 25; 36; 49; 64; 81}.

   (б) Ответ: {1×4, 2×3}.

2. Сколько элементов в множестве $A = X \cap \mathbb{Z}$, где $X = \{-\sqrt{7} \le x \le \sqrt{127}/11\}$, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел?

   Ответ: 4 элемента.

   Указание: $A = \{-2; -1; 0; 1\}$.

3. Клоуны играли в прятки детьми. Всего было 36 детей. Из них двое не прятались ни в подвале, ни в магазине, ни в цирке. В подвале за всё время пряталось 25 ребят, в магазине — 11, а в цирке 17 ребят; и в подвале, и в магазине — 6; и в подвале, и в цирке — 10; и в цирке, и в магазине — 4. Сколько детей пряталось во всех трёх местах?

   Ответ: 1.

   Решение. Учитывая, что двое не входят в три заданных множества, имеем дело с 36 – 2 = 34 ребятами. Запишем формулу включений-исключений для трёх множеств: 34 = 25 + 11 + 17 – 6 – 10 – 4 + x, где x — искомое число ребят, откуда найдем $x = 1$.

4. Найдите все числа, удовлетворяющие условиям:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x^2+3)(x+3)^2 = 0 \\ (|x-2|-3)\cdot(x^3-9x) = 0 \end{cases} \\ x^3 - 2x^2 = -x \end{array}\right.$$

   Ответ: 0, 1, –3.

   Решение. Решением первого уравнения системы является число −3, решением второго — числа 5, –1, 0, 3 и –3. Таким образом, решение системы $x = -3$. Решения третьего уравнения — числа 0 и 1.

5. На плоскости нарисованы перекрывающиеся квадрат и круг. Вместе они занимают площадь 1966 см². Площадь пересечения составляет 85 см². Площадь круга равна 1322 см². Чему равен периметр квадрата?

   Ответ: 108 см.

   Решение. По формуле включений-исключений площадь квадрата равна 1966 – 1322 + 85 = 729 см², откуда сторона равна 27 см, тогда периметр равен $27 \cdot 4 = 108$ см.

6. Нескольким ребятам раздали по три карточки. На некоторых написана цифра «5», на остальных — «7». Оказалось, что число «55» могут сложить из своих карточек 25 ребят, число «77» — 17 ребят, а число «57» — 8 ребят. Сколько ребят получили три одинаковые карточки?

Ответ: 34.

Решение. Возможны четыре вида наборов из трёх карточек:
— 5, 5, 5; пусть a ребят имеют такой набор;
— 5, 5, 7; пусть b ребят имеют такой набор;
— 5, 7, 7; пусть c ребят имеют такой набор;
— 7, 7, 7; пусть d ребят имеют такой набор.

Тогда $a + b = 25$, $c + d = 17$, $b + c = 8$. Нас интересует величина $a + d$.
Имеем: $a + d = (a + b) + (c + d) - (b + c) = 25 + 17 - 8 = 34$.