Блок 3. Делимость: остатки при делении

Подготовительное занятие

Задания

- Найдите неполное частное и остаток от деления:
  (а) 19 на 3; 666 на 4; (б) −3 на 5; −34 на 7.
- Пусть a при делении на 7дает остаток 5. Какие остатки при делении на 7 дают числа (а) $a + 5$, (б) $a + 2014$, (в) $2a$, (г) $3a + 15$, (д) $-a$, (е) $-a + 6$?

1. Целые числа a, b и c дают при делении на 5 остатки 1, 2, 4 соответственно. Какие остатки при делении на 5 дают числа: (а) $a + b + c$; (б) $2a - 3b + 5c$?
2. Число a — четное. Каким может быть остаток от деления числа a на 6?
3. (а) Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 дает остаток 4, при делении на 7 дает остаток 6, а при делении на 11 — остаток 10.

   (б) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 3, при делении на 25 дает остаток 22, при делении на 10 — остаток 7.
4. Дети делили апельсины. Оказалось, что ни на 5, ни на 3, ни на 4 человека апельсины не делятся поровну. Но когда попугай Кеша съел один из апельсинов, оставшееся количество уже можно было поделить и на 5, и на 3 человека, а на 4 все еще нет. Сколько же было апельсинов, если известно, что их было меньше 40?
5. (а) Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в неполном частном получится то же число, что и в остатке.
   (б) На какие натуральные числа можно разделить число 1001 так, что неполное частное будет равно остатку?
6. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m.
7. Маша поссорилась с Петей, поэтому решила порвать его фотографию. Сначала она разорвала ее на 8 кусков. Потом взяла один из кусочков и разорвала его еще на 8 кусков, затем снова взяла один из кусочков и разорвала на 8, и так далее. Успокоившись, Машенька пересчитала кусочки.
   (а) Могло ли их оказаться ровно 2019 кусочков?
   (б) Какое наименьшее число кусочков могло получиться, если известно, что их количество выражается четырёхзначным числом?

8. В верхнем углу таблицы 5×5 стоит число 1. Остальные клетки пусты. В них вписывают числа по следующему правилу: если в какой-то клетке стоит число a, то в соседнюю пустую клетку можно записать либо число $4a$, либо число $(a - 12)$, либо число $(a + 3)$. Так заполнили числами все клетки. Может ли оказаться сумма чисел стала равной нулю?

Блок 3. Делимость: остатки при делении

Подготовительное занятие

Указания, ответы и решения

Занятие посвящено задачам об остатках чисел при делении. Полезно вспомнить определение и рассмотреть, например, как находятся остатки отрицательных чисел.

✓ Дано натуральное число d. Любое целое число a единственным способом представимо в виде $a = kd + r$, где k и r — целые числа, $0 \le r < d$. Число r называют *остатком* от деления a на d, число k — *неполным частным*.

Заметим, что в качестве делителя рассматриваются только натуральные числа. При делении на отрицательные целые числа говорить об остатках нельзя.

Задания, которые рекомендуем разобрать вместе с определением.

- Найдите неполное частное и остаток от деления:
  (а) 19 на 3; 666 на 4;
  (б) −3 на 5; −34 на 7.

  Ответ: (а) 6 и 1, 166 и 2, (б) −1 и 2, −5 и 1.

  Решение. Ответы следуют из следующих равенств:
  (а) $19 = 6 \cdot 3 + 1$, $666 = 166 \cdot 4 + 2$;
  (б) $-3 = -1 \cdot 5 + 2$, $-34 = -5 \cdot 7 + 1$.

  Комментарий. При обсуждении решения пункта (б) полезно заметить, что остаток при делении на d не меняется при прибавлении (вычитании) числа d. Например, −3 при делении на 5 даёт тот же остаток, что и −3 + 5 = 2.

- Пусть a при делении на 7дает остаток 5. Какие остатки при делении на 7 дают числа (а) $a + 5$, (б) $a + 2014$, (в) $2a$, (г) $3a + 15$, (д) $-a$, (е) $-a + 6$?

  Указание. Можно рассуждать по смыслу остатка. Например, в (а) если число a — несколько раз 7 и еще 5, то a + 5 — несколько раз 7 и еще 10 = 7 + 3, то есть несколько раз 7 и еще 3. Далее приведены решения с использованием формул.

  Ответ: (а) 3, (б) 3, (в) 3, (г) 2, (д) 2, (е) 1.

  Решение. По определению $a = 7k + 5$. Тогда получаем:
  (а) число $a + 5 = (7k + 5) + 5 = 7k + 10 = 7(k + 1) + 3$ даёт остаток 3,
  (б) число $a + 2014 = 7k + 2019 = 7k + 288 \cdot 7 + 3 = 7(k + 288) + 3$ даёт остаток 3,
  (в) число $2a = 2(7k + 5) = 14k + 10 = (2k + 1) \cdot 7 + 3$ даёт остаток 3,
  (г) число $3a + 15 = 3(7k + 5) + 15 = 21k + 30 = 7(3k + 4) + 2$ даёт остаток 1,

  (д) число $-a = -7k - 5 = 7(-k - 1) + 2$ даёт остаток 2,
  (е) число $-a + 6 = -7k - 5 + 6 = -7k + 1$ даёт остаток 1.

1. Целые числа a, b и c дают при делении на 5 остатки 1, 2, 4 соответственно. Какие остатки при делении на 5 дают числа: (а) $a + b + c$; (б) $2a - 3b + 5c$?

   Ответ: (а) 2, (б) 1.

   Решение. По определению $a = 5x + 1, b = 5y + 2, c = 5z + 4$. Тогда

   (а) число $a + b + c = (5x + 1) + (5y + 2) + (5z + 4) = 5(x + y + z + 1) + 2$ даёт остаток 2.

   (б) число $2a - 3b + 5c = 2(5x + 1) - 3(5y + 2) + 5(5z + 4) = 5(2x - 3y + 3z) + 16 = 5(2x - 3y + 3z + 3) + 1$ даёт остаток 1.

2. Число a — четное. Каким может быть остаток от деления числа a на 6?

   Ответ: 0, 2, 4.

   Решение. По определению $a = 6k + r$. Так как число a чётное и слагаемое $6k$ также чётное, то чётным должно быть и число r. Значит, остаток может быть только 0, 2 или 4. Все три варианта возможны. Например, такие остатки дают чётные числа 0, 2 и 4.

3. (а) Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 дает остаток 4, при делении на 7 дает остаток 6, а при делении на 11 — остаток 10.

   (б) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 3, при делении на 25 дает остаток 22, при делении на 10 — остаток 7.

   Ответ: (а) 384, (б) 147.

   Решение. (а) Если искомое число увеличить на 1, то оно будет делиться на 5, 7, 11. Эти числа взаимно просты, значит, это число должно делиться на $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. Значит, наименьшее подходящее число равно $385 - 1 = 384$.

   (б) Если искомое число увеличить на 3, то оно будет делится на 25, 10 и 3. Тогда оно должно делится на их НОК (25; 10; 3) = 150. Значит, наименьшее число, подходящее по условию равно 150 − 3 = 147.

4. Дети делили апельсины. Оказалось, что ни на 5, ни на 3, ни на 4 человека апельсины не делятся поровну. Но когда попугай Кеша съел один из апельсинов, оставшееся количество уже можно было поделить и на 5, и на 3 человека, а на 4 все еще нет. Сколько же было апельсинов, если известно, что их было меньше 40?

   Ответ: 31.

Решение. После Кеши количество апельсинов стало делиться на 3 и 5, а значит и на 15. Рассмотрим случаи.

(1) Если после Кеши было 15 апельсинов, то в начале их было 16. Это число кратно 4, это противоречит условию.

(2) Если после Кеши было 30 апельсинов, то в начале их было 31 — это удовлетворяет условию.

(3) Остальные числа, делящиеся на 15, уже больше 40, то есть не подходят по условию.

5. (а) Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в неполном частном получится то же число, что и в остатке.

(б) На какие натуральные числа можно разделить число 1001 так, что неполное частное будет равно остатку?

(а) Ответ: 8, 16, 24, 32, 40, 48.

Решение. Искомые числа имеют вид $7a + a = 8a$, где a — целое число от 0 до 6. Если а = 0, то получаем число, не являющееся натуральным. В остальных вариантах получаем 8, 16, 24, 32, 40, 48.

(б) Ответ: 1000, 142, 90, 76.

Решение. Если делитель равен d, а неполное частное и остаток равны r, то из условия $1001 = dr + r = r(d + 1)$. При этом d — натуральное число, а целое число r от 0 до $d - 1$, то есть первый множитель меньше второго.

Число 1001 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только 4 способами: $1 \cdot 1001$, $7 \cdot 143$, $11 \cdot 91$, $13 \cdot 77$. Этим случаям соответствует значения d, равные 1000, 142, 90, 76.

6. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m.

Ответ: 60.

Решение (рассуждения). Число 13 на 2 меньше 15. Значит, при одном и том же частном n остаток от деления на 13 на $2n$ больше, чем остаток от деления на 15, то есть $2n = 8$. Отсюда делимое равно $15 \cdot 4 = 13 \cdot 4 + 8 = 60$.

Решение (формулы). Из условия $m = 13n + 8 = 15n$, отсюда $n = 4, m = 60$.

7. Маша поссорилась с Петей, поэтому решила порвать его фотографию. Сначала она разорвала ее на 8 кусков. Потом взяла один из кусочков и разорвала его еще на 8 кусков, затем снова взяла один из кусочков и разорвала на 8, и так далее. Успокоившись, Машенька пересчитала кусочки.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2022–2023 учебный год

(а) Могло ли их оказаться ровно 2019 кусочков?

(б) Какое наименьшее число кусочков могло получиться, если известно, что их количество выражается четырёхзначным числом?

Ответ: (а) нет, (б) 1002.

Решение. Каждый раз Маша из одного кусочка делает 8, то есть количество кусков увеличивается на $8 - 1 = 7$. Значит, число кусочков, которые у неё получаются, — все подряд числа, дающие при делении на 7 остаток 1.

(а) Число 2019 при делении 7 даёт остаток 3. Значит, такое число кусочков не могло получиться.

(б) Минимальное четырехзначное число, дающее при делении на 7 остаток 1, — 1002.

8. В верхнем углу таблицы 5×5 стоит число 1. Остальные клетки пусты. В них вписывают числа по следующему правилу: если в какой-то клетке стоит число a, то в соседнюю пустую клетку можно записать либо число $4a$, либо число $(a - 12)$, либо число $(a + 3)$. Так заполнили числами все клетки. Может ли оказаться сумма чисел стала равной нулю?

Ответ: нет, так не могло случиться.

Решение. Заметим, что первое число 1 даёт при делении на 3 остаток 1. Если число a даёт остаток 1, то и числа $4a$, $a - 12$, $a + 3$ дают тот же остаток. Действительно, если $a = 3k + 1$, то $4a = 4(3k + 1) = 3(4k + 1) + 1$, а в остальных случаях прибавляется или вычитается число, кратное 3.

Вывод: все числа в таблице будут давать при делении на 3 остаток 1.

Сумма 25 чисел, дающих при делении на 3 остаток 1, даёт тот же остаток, что и число 25, то есть 1. Она не может быть равной 0, так как число 0 не даёт остаток 1.