

Блок 4. Логика

Подготовительное занятие

Задания

Тестовое задание

- Сколько натуральных чисел N , про которые утверждение « N больше 10» неверно?
- Сидят мальчик и девочка. «Я — мальчик», — говорит Женя. «Я — девочка», — говорит Саша. Хотя бы один из них врёт. Кто из них мальчик, а кто — девочка?
- У Пети дома живёт кот. Если на улице идёт дождь, то кот чихает. Сейчас на улице нет дождя. Чихает ли кот, живущий у Пети?
- Сколько двузначных чисел, про каждое из которых указанная фраза неверна:
(а) «В этом числе есть цифра 1 и есть цифра 2»;
(б) «В этом числе есть цифра 1 или есть цифра 2»?
- Собралось 10 человек. Каждый либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда врёт). Каждый заявил: «Среди остальных 9 человек ровно 5 рыцарей». Сколько лжецов среди этих 10 человек?
- Встретились три друга: Белов, Серов, Чернов. На них были белая, серая и чёрная рубашки. Одетый в белую рубашку сказал Чернову: «Интересно, что цвет рубашки на каждом из нас не соответствует фамилии». Какой цвет рубашки у каждого?

Задачи для самостоятельного решения

1. До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им всем явиться ко двору.
Молвили богатыри:
Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».
Добрыня Никитич: «Змея убил Алёша Попович».
Алёша Попович: «Я убил змея».
Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое лукавили. Кто убил змея?
2. Попугай лжёт по понедельникам, вторникам и средам, а в остальные дни говорит правду. В какие дни он может заявить: (а) «Я лгал вчера»; (б) «Я буду лгать завтра»; (в) «Я лгал вчера и буду лгать завтра»?
3. Напишите отрицания к следующим утверждениям:
 - этот крокодил зелёный;
 - эта ель высокая и пушистая;

- у меня дома на картине нарисован кот или пёс;
 - некоторым студентам больше 20 лет;
 - в двузначном числе нет цифры «1» и есть цифра «2».
4. Даны два утверждения: «В этом числе нет двойки или тройки», «В этом числе нет семерки и пятерки». Напишите наибольшее трехзначное число, для которого оба утверждения не верны.
 5. На острове рыцарей и лжецов вечером несколько местных жителей собрались за круглым столом. Каждый из них сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Сколько за столом рыцарей и лжецов, если собрались (а) 7 человек, (б) 6 человек?
 6. В синем, красном и желтом горшках на подоконнике в ряд растут красная герань, синяя незабудка и желтая лилия. Известно, что ни один цветок не растет в горшке своего цвета. Лилия растет правее всех, а в центре нет ничего красного. Определите, в каком порядке растут цветы и какого цвета у них горшки.
 7. В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас, и вода. Известно, что вода и молоко находятся не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В каком сосуде налита какая жидкость?

Блок 4. Логика

Указания, ответы и решения

В этом занятии мы познакомимся с основными типами логических задач, такими как, верные и неверные высказывания (части 1–2), работа с высказываниями, содержащими слова «и» и «или» и построение отрицаний (часть 3), установление соответствия между двумя множествами (часть 4).

Обратите внимание, что при решении задач недостаточно получить ответ и проверить его. Нужно иметь рассуждения, из которых следует, что иные ответы не подойдут.

Знаком [?] отмечены моменты, которые стоит дополнительно объяснить.

Предлагаем задачи, которые полезно обсудить с ребятами в начале занятия. Это можно сделать, рассматривая их по одной или дав в начале занятия как тест.

- Сколько натуральных чисел N , про которые утверждение « N больше 10» неверно?

Ответ: 10.

Решение. Если для числа N утверждение « N больше 10» не верно, то верно « N не больше 10». Значит, подходят числа от 1 до 10, их 10 штук.

Комментарий. Обратите внимание, что отрицанием к « N больше 10» не является « N меньше 10». Это нужно обсудить, так как тот же ответ можно получить, рассуждая неправильно. Например, из « N меньше 10» можно сделать вывод, что таких значений N ровно 10. Также можно ошибочно считать, что число «0» является натуральным.

- Сидят мальчик и девочка. «Я — мальчик», — говорит Женя. «Я — девочка», — говорит Саша. Хотя бы один из них врёт. Кто из них мальчик, а кто — девочка?

Ответ: Женя — девочка, Саша — мальчик.

Решение 1 (рассмотрим все случаи).

Возможны только два варианта:

- Женя — мальчик,
- Женя — девочка.

(1) Женя — мальчик, значит, Саша — девочка. Оба говорят правду. Это противоречит условию.

(2) Женя — девочка, значит, Саша — мальчик. Оба говорят неправду. Это удовлетворяет условию.

Решение 2 (сократим рассуждения). Если одно из утверждений ребят неверно, то сразу же неверно и второе. Раз один из них врёт, следовательно, они оба неверны. Тогда Женя — девочка, Саша — мальчик.

Комментарий. Обратите внимание на полезный совет: «Если можно рассмотреть все случаи, то лучше рассмотреть все случаи».

- У Пети дома живёт кот. Если на улице идёт дождь, то кот чихает. Сейчас на улице нет дождя. Чихает ли кот, живущий у Пети?

Ответ: может чихать, а может и не чихать.

Решение. Всё время делится на промежутки «идёт дождь» и «нет дождя». Про первый сказано, что кот чихает. Про второй не сказано ничего, поэтому в эти моменты кот может чихать, а может и не чихать.

Комментарий. Данное утверждение построено как связка «если A , то B » (её обозначают $A \rightarrow B$), где A = «идёт дождь», B = «кот чихает». Эта связка означает, что если A верно, то B обязано быть верным, если A ложно, то B может быть и верным, и ложным. Данные выводы можно записать в виде таблицы (см. справа).

A	B	$A \rightarrow B$
верно	верно	верно
верно	ложно	ложно
ложно	верно	верно
ложно	ложно	верно

Дополнительный вопрос. А какой вывод можно сделать, если кот не чихает?

Ответ: не идёт дождь.

- Сколько двузначных чисел, про каждое из которых указанная фраза неверна:
(а) «В этом числе есть цифра 1 и есть цифра 2»;
(б) «В этом числе есть цифра 1 или есть цифра 2»?

(а) Ответ: 88.

Решение. Фраза «В этом числе есть цифра 1 и есть цифра 2» верна про числа 12 и 21. Всего 90 двузначных чисел. Значит, про остальные $90 - 2 = 88$ чисел фраза неверна.

(б) Ответ: 56.

Решение. Если неверно «В этом числе есть цифра 1 или есть цифра 2», тогда верно «В этом числе нет цифры 1 и нет цифры 2». Из цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 можно составить $7 \cdot 8 = 56$ двузначных чисел [?].

Комментарий. Следует научиться отвечать на вопрос: «Если указанная фраза неверна, то что тогда верно?». В данном случае ответ таков:

Неверно «В этом числе есть цифра 1 и есть цифра 2», тогда «В этом числе нет цифры 1 или нет цифры 2».

Неверно «В этом числе есть цифра 1 или есть цифра 2», тогда «В этом числе нет цифры 1 и нет цифры 2».

- Собралось 10 человек. Каждый либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда врёт). Каждый заявил: «Среди остальных 9 человек ровно 5 рыцарей». Сколько лжецов среди этих 10 человек?

Ответ: 4 лжеца или все лжецы.

Решение. Если все лжецы, то каждый мог такое заявить.

Если есть рыцарь, то кроме него есть еще ровно 5 рыцарей. Заметим, что ситуация с 6 рыцарями и 4 лжецами удовлетворяет условию.

Комментарий. Обратите внимание, что задачи про рыцарей и лжецов встречаются очень часто. Найдите с ребятами ответы на следующие вопросы, помогающие вникнуть в ситуацию.

Приведите примеры вопросов, на которые и рыцарь, и лжец дадут одинаковые ответы?

Ответ: например, на такие вопросы «Ты рыцарь?», «Ты лжец?».

- Предположим, Вы попали на остров рыцарей и лжецов. Встретили местного жителя. Приведите пример вопроса, по ответу на который можно понять, лжец он или рыцарь.

Решение. Подойдёт любой вопрос, на который всем на острове известен правильный ответ, тогда рыцарь ответит правильно, а лжец — нет. Например, «Вы — крокодил?».

- Как-то раз на племенном ужине кто-то сказал: «Вчера мой сосед заявил мне, что он лжец!». Могло ли такое быть?

Решение. Нет, не могло. Потому что никто на острове не мог сказать, что он лжец [?].

- Встретились три друга: Белов, Серов, Чернов. На них были белая, серая и чёрная рубашки. Одетый в белую рубашку сказал Чернову: «Интересно, что цвет рубашки на каждом из нас не соответствует фамилии». Какой цвет рубашки у каждого?

Замечание. Результаты рассуждений удобно отмечать в таблице:

	Белов	Чернов	Серов
Белая рубашка			
Чёрная рубашка			
Серая рубашка			

Решение. Из условия задачи следует, что на Белове не белая рубашка (1), на Серове — не серая (1), на Чернове — не чёрная (1). Поставим минусы в эти клетки таблицы.

	Белов	Чернов	Серов
Белая рубашка	(1) -		
Чёрная рубашка		(1) -	
Серая рубашка			(1) -

Также ясно, что Чернов не в белой рубашке (2) — ставим минус в соответствующую клетку.

	Белов	Чернов	Серов
Белая рубашка	(1) -	(2) -	
Чёрная рубашка		(1) -	
Серая рубашка			(1) -

Видно, что в белой рубашке может быть только Серов (3), а Чернов может быть только в серой (4). Остаётся, что Белов одет в чёрную рубашку (5).

	Белов	Чернов	Серов
Белая рубашка	(1) -	(2) -	(3) +
Чёрная рубашка	(5) +	(1) -	
Серая рубашка		(4) +	(1) -

Замечание 1 (о таблице). С одной стороны, таблица — удобное средство и получения решения, и его презентации. Но решение задачи не сама таблица, а порядок её заполнения. Поэтому, на олимпиаде решением является описание, как заполняли таблицу.

Замечание 2. Удобно около плюсов и минусов указывать, в каком порядке они ставились (как мы указывали в решении выше).

Вторая часть занятия — самостоятельное решение задач «с номерами».

- До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им всем явиться ко двору.

Молвили богатыри:

Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».

Добрыня Никитич: «Змея убил Алёша Попович».

Алёша Попович: «Я убил змея».

Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое слугавили. Кто убил змея?

«Решение». Змея убил Добрыня. Тогда Илья сказал правду, а Добрыня и Алёша слухавили. Всё сходится.

Комментарий. В данном случае приведён один случай, когда выполняются все условия задачи. При этом не ясно, есть ли еще такие случаи. Вполне верным ответом может быть «Змея убил Добрыня или Алёша» в случае, если ситуация, когда Змея убил Алёша Попович, также удовлетворяет всем условиям задачи (а когда убил Илья — нет).

Решение 1 (рассмотрим все случаи).

(1) Если убил Илья Муромец, то все трое сказали неправду, что противоречит условию.

(2) Если убил Алёша, то и Добрыня, и Алёша сказали правду, а это противоречит условию.

(3) Если убил Добрыня, то Илья сказал правду, а Добрыня и Алёша слухавили. Такой вариант подходит.

Решение 2 (сократим рассуждения). Добрыня и Алёша утверждают одно и то же. Но правду сказал лишь один богатырь. Это мог быть только Илья. Значит, змея убил Добрыня.

2. Попугай лжёт по понедельникам, вторникам и средам, а в остальные дни говорит правду. В какие дни он может заявить: (а) «Я лгал вчера»; (б) «Я буду лгать завтра»; (в) «Я лгал вчера и буду лгать завтра»?

(а) Ответ: понедельник и четверг.

(б) Ответ: среда и воскресенье.

(в) Ответ: понедельник и среда.

Указание. В каждом пункте нужно аккуратно рассмотреть все дни недели.

3. Напишите отрицания к следующим утверждениям:

- этот крокодил зелёный;
- эта ель высокая и пушистая;
- у меня дома на картине нарисован кот или пёс;
- некоторым студентам больше 20 лет;
- в двузначном числе нет цифры «1» и есть цифра «2».

Ответ: посмотрите утверждения и их отрицания:

- этот крокодил не зелёный;
- эта ель не высокая или не пушистая;
- у меня дома на картине не нарисован ни кот, ни пёс;
- нет студентов, которым больше 20 лет (всем студентам не более 20 лет);

– в двузначном числе есть цифра «1» или нет цифры «2».

4. Даны два утверждения: «В этом числе нет двойки или тройки», «В этом числе нет семерки и пятерки». Напишите наибольшее трехзначное число, для которого оба утверждения не верны.

Ответ: 732.

Решение. Построим отрицания к написанным утверждениям:

«В этом числе есть двойка и (есть) тройка»,

«В этом числе есть семёрка или пятерка».

Значит, число состоит либо из цифр 2, 3, 5, либо из цифр 2, 3, 7. Наибольшее подходящее трехзначное число — 732.

5. На острове рыцарей и лжецов вечером несколько местных жителей собрались за круглым столом. Каждый из них сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Сколько за столом рыцарей и лжецов, если собрались (а) 7 человек, (б) 6 человек?

(а) Ответ: все лжецы.

(б) Ответ: все лжецы или 4 рыцаря и 2 лжеца.

Решение. Рассмотрим случаи, когда фразу произнёс лжец и когда рыцарь, и будем делать из них выводы.

(1) Если фразу сказал лжец, то либо оба соседа лжецы, либо оба рыцари [?].

(2) Если фразу произнёс рыцарь, то его соседи рыцарь и лжец. Тогда с другой стороны от его соседа-рыцаря сидит еще один лжец: –Л–Р–Р–Л–.

Если рыцарей нет, то ситуация не противоречит условию.

Если рыцарь есть, то рыцари сидят по двое и между ними один лжец (–Л–Р–Р–Л–Р–Р–Л–). Если всего 6 человек, то такая рассадка возможна (за столом 4 рыцаря и 2 лжеца). Если всего 7 человек, то рассадить таким образом не удастся (все должны разбиться на тройки).

Комментарий. При разборе решения задачи обсудите такие вопросы:

Что можно сказать, если за столом сидят 2015, 2016 или 2017 человек?

Решение. Могут быть все лжецы. Если есть хотя бы один рыцарь, то все разбиваются на группы –Р–Р–Л–, то есть общее число должно быть кратным трём. Поэтому не могло быть 2015 или 2017 человек, среди которых есть рыцарь. Если за столом 2016 человек, то рыцарей две трети (1344), а лжецов — треть (672).

6. В синем, красном и желтом горшках на подоконнике в ряд растут красная герань, синяя незабудка и желтая лилия. Известно, что ни один цветок не растет в горшке

своего цвета. Лилия растет правее всех, а в центре нет ничего красного. Определите, в каком порядке растут цветы и какого цвета у них горшки.

Ответ: слева направо растут герань в синем горшке, незабудка в желтом горшке и лилия в красном горшке.

Решение. Так как лилия растет правее всех, а в центре нет ничего красного, то герань растет левее всех. Значит, незабудка растет в центре. У нее не красный и не синий горшок, следовательно, у нее желтый горшок. Тогда у лилии красный горшок и у герани синий.

7. В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас, и вода. Известно, что вода и молоко находятся не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В каком сосуде налита какая жидкость?

Ответ: в чашке — лимонад, в стакане — вода, в кувшине — молоко, в банке — квас.

Решение. В банке может быть только квас (2), ибо из условия следует, что там не лимонад, не вода и не молоко (1). В чашке — лимонад, так как известно, что там не молоко и не вода (3). Поскольку в стакане не молоко и не квас, не лимонад — значит вода (4), а в кувшине-то, что осталось, то есть молоко (5).

Таким образом, получаем:

	молоко	лимонад	квас	вода
Чашка	(3) -	(3) +	(2) -	(3) -
Стакан	(4) -	(3) -	(4) -	(4) +
Кувшин	(5) +	(3) -	(2) -	(4) -
Банка	(1) -	(1) -	(2) +	(1) -