Блок 5. Геометрия. Подсчёт углов

Интернет-карусель (2021–2022)

Задания

1. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. Точка D на стороне BC такова, что $AD = BD$. Найдите угол C треугольника, если $\angle CAD = 39°$.

2. Дан треугольник ABC, угол A равен 30 градусов. Что из следующего возможно?
(1) $AB = 10$ и $BC = 5$.
(2) $AB = 13$ и $BC = 6$.
(3) $AB = 15$ и $BC = 8$.

3. Даны три равных треугольника ABC, ACD и ADE (точки B, C, D, E — различные); $AB = AC = AD = AE$; $\angle CAD$ = равен 14°. Найдите величину угла CBE.

4. Даны три равных треугольника ABC, ACD и ADE (точки B, C, D, E — различные); $AB = AC = AD = AE$; $\angle CAD$ = равен 14°. Найдите (меньший) угол между прямыми BD и CE.

5. Отрезки AB и CD параллельны. Внутри четырехугольника $ABCD$ есть такая точка E, что угол BAE в 4 раза меньше угла AED и на 74° меньше угла CDE. Найдите величину угла AED.

6. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC$, угол A равен 40 градусов. На сторонах AB и AC отмечены такие точки D и E соответственно, что DE перпендикулярно AC, $2DE = BC$. Найдите величину угла ADC.

7. Выписали градусные меры трёх внешних углов треугольника, взятых у разных вершин. Что из следующего возможно?
(1) Один из них вчетверо больше другого.
(2) Один из них вчетверо больше другого и вдвое больше третьего.
(3) Один из них равен сумме двух других.

8. Точка D вне равностороннего треугольника ABC такова, что $\angle ABD = \angle CAD = 40°$. Найдите величину угла CDA.

9. Среднее градусных мер углов A и B треугольника ABC равно 57°. Среднее градусных мер углов B и C — 58°. Чему равно среднее градусных мер всех трёх углов треугольника ABC? Везде среднее — это среднее арифметическое.

10. Среднее градусных мер углов A и B треугольника ABC равно 57°. Среднее градусных мер углов B и C — 58°. Чему равно среднее градусных мер углов C и A? Везде среднее — это среднее арифметическое.

11. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются внутри его в точке O. Известно, что $AB = AD = CD$ и $OC = OD$. Найдите величину угла ADC, если $\angle BAC = 20°$.

12. На сторонах BC и AC равностороннего треугольника ABC отмечены соответственно такие точки D и E, что $BD = CE$; точка F — пересечение AD и BE. Найдите величину угла BAD, если $\angle AFB = 120°$.

13. Дан треугольник ABC, AH — его высота, AL — его биссектриса. Угол BAL в 4 раза меньше угла BAH и в 5 раз меньше угла ABH. Найдите величину угла C треугольника ABC.

14. Дан треугольник ABC, угол B которого равен 70 градусов. Внутри отметили такую точку D, что угол ADC равен 130 градусов. Найдите величину (меньшего) угла между биссектрисами углов BAD и BCD.

Блок 5. Геометрия. Подсчёт углов

Интернет-карусель (2021–2022)

Ответы, указания, решения

1. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. Точка D на стороне BC такова, что $AD = BD$. Найдите угол C треугольника, если $\angle CAD = 39°$.

   Ответ: 73°.

   Решение. Пусть $\angle ACB = \alpha$. Треугольник ABC — равнобедренный, в нём $\angle CAB = \alpha$, $\angle CAB = 180° - 2\alpha$. Треугольник ABD — равнобедренный, в нём $\angle DAB = 180° - 2\alpha$. Тогда $\angle DAC = \angle CAB - \angle DAB = \alpha - (180° - 2\alpha) = 3\alpha - 180° = 39°$, откуда $3\alpha = 219°$, $\alpha = 73°$.

2. Дан треугольник ABC, угол A равен 30 градусов. Что из следующего возможно?
   (1) $AB = 10$ и $BC = 5$.
   (2) $AB = 13$ и $BC = 6$.
   (3) $AB = 15$ и $BC = 8$.

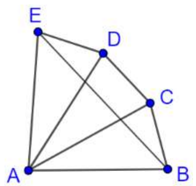
   Ответ: 1 и 3.

   Решение. Пусть дан угол A, равный 30°, и точка B на его стороне. Перпендикуляр, опущенный из точки B на другую сторону угла, — катет прямоугольного треугольника с углом 30°, он вдвое меньше гипотенузы AB. Перпендикуляр — наименьший отрезок, соединяющий точку B с точкой на другой стороне угла.

   Вывод: для любой точки C на другой стороне угла $BC \geq AB/2$, причём это условие не только необходимое, но и достаточное. Ему удовлетворяют пункты (1) и (3), не подходит пункт (2).

3. Даны три равных треугольника ABC, ACD и ADE (точки B, C, D, E — различные); $AB = AC = AD = AE$; $\angle CAD$ = равен 14°. Найдите величину угла CBE.

   Ответ: 14°.

   Решение. В равнобедренном треугольнике ABC угол ABC равен $(180° - 14) : 2 = 83°$. В равнобедренном треугольнике ABE угол ABE равен $(180° - 3 \cdot 14°) : 2 = 69°$.

   Тогда $\angle CBE = \angle ABC - \angle ABE = 83° - 69° = 14°$.

4. Даны три равных треугольника ABC, ACD и ADE (точки B, C, D, E — различные); $AB = AC = AD = AE$; $\angle CAD$ = равен 14°. Найдите (меньший) угол между прямыми BD и CE.

   Ответ: 14°.

   Решение. Из условия:
   ΔABC — равнобедренный, в нём $\angle ABC = (180° - 14°) : 2 = 83°$;
   ΔABD — равнобедренный, в нём $\angle ABD = (180° - 2 \cdot 14°) : 2 = 76°$.

   Тогда $\angle DBE = \angle BEC = 83° - 76° = 7°$.

   Если точка F — BD и CE, то $\angle BFC = 7° + 7° = 14°$ (как внешний угол треугольника BEF).

5. Отрезки AB и CD параллельны. Внутри четырехугольника $ABCD$ есть такая точка E, что угол BAE в 4 раза меньше угла AED и на 74° меньше угла CDE. Найдите величину угла AED.

   Ответ: 148°.

   Решение. Из условия следует, что $\angle AED = \angle BAE + \angle CDE$. Действительно, прямая, проходящая через точку E параллельно AB и CD, образует с AE угол, равный $\angle BAE$, а с DE — угол, равный $\angle CDE$.

   Тогда, если $\angle BAE = \alpha$, то $\angle AED = 4\alpha$, $\angle CDE = \alpha + 74°$. Выполнено $4\alpha = \alpha + (\alpha + 74°)$, $\alpha = 37°$, $\angle AED = 4\alpha = 148°$.

6. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC$, угол A равен 40 градусов. На сторонах AB и AC отмечены такие точки D и E соответственно, что DE перпендикулярно AC, $2DE = BC$. Найдите величину угла ADC.

   Ответ: 110°.

   Указание: конфигурация единственная, подходит такая точка D, что $CD = BC$.

7. Выписали градусные меры трёх внешних углов треугольника, взятых у разных вершин. Что из следующего возможно?
   (1) Один из них вчетверо больше другого.
   (2) Один из них вчетверо больше другого и вдвое больше третьего.
   (3) Один из них равен сумме двух других.

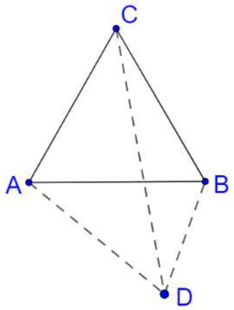
   Ответ: 1.

   Указание. Если α, β, γ — величины углов треугольника, то величины внешних углов равны $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ и $\gamma + \alpha$. Такие существуют в том и только том случае, когда для них выполняется «неравенство треугольника»: величина большего менее суммы двух других. Это условие может быть выполнено только в случае (1).

8. Точка D вне равностороннего треугольника ABC такова, что $\angle ABD = \angle CAD = 40°$. Найдите величину угла CDA.

Ответ: 70°.

Решение. Из условия в треугольнике ACD угол C равен 40°, угол A равен 60° + 40° = 100°, значит, угол D равен 180° – 40° – 100° = 40°. Значит, треугольник ACD — равнобедренный, в нём $AC = AD$. Тогда треугольник ABD — также равнобедренный (так как $AD = AC = AB$), в нём $\angle A = 40°$, $\angle ADB = (180° - 40°) : 2 = 70°$.



9. Среднее градусных мер углов A и B треугольника ABC равно 57°. Среднее градусных мер углов B и C — 58°. Чему равно среднее градусных мер всех трёх углов треугольника ABC? Везде среднее — это среднее арифметическое.

Ответ: 60°.

Указание. Это задача-шутка.

10. Среднее градусных мер углов A и B треугольника ABC равно 57°. Среднее градусных мер углов B и C — 58°. Чему равно среднее градусных мер углов C и A? Везде среднее — это среднее арифметическое.

Ответ: 65°.

Указание. Сумма этих средних равна 180 градусов.

11. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются внутри его в точке O. Известно, что $AB = AD = CD$ и $OC = OD$. Найдите величину угла ADC, если $\angle BAC = 20°$.

Ответ: 100°.

Решение. Пусть $\angle CAD = \alpha$. Треугольник ABD равнобедренный с углом A при вершине, равным $\alpha + 20°$. Значит, $\angle ADB = (180° - (20° + \alpha)) : 2 = 80° - \alpha/2$. В равнобедренном треугольнике COD угол CDO равен α. Тогда по сумме углов треугольника ACD получаем $3\alpha + (80° - \alpha/2) = 180°$, $\alpha = 40°$.

Тогда (из треугольника ACD) получаем $\angle ADC = 180° - 40° - 40° = 100°$.

12. На сторонах BC и AC равностороннего треугольника ABC отмечены соответственно такие точки D и E, что $BD = CE$; точка F — пересечение AD и BE. Найдите величину угла BAD, если $\angle AFB = 120°$.

Ответ: величина — любая больше 0° и менее 60°.

Решение. Треугольники ABD и BCE равны, поэтому $\angle BAD = \angle CBE$, откуда $\angle BAF + \angle FBA = 60°$, $\angle AFB = 120°$. Значит, независимо от положения точки D на

стороне BC выполняется условие $\angle AFB = 120°$. То есть, $\angle BAD$ может иметь любую меру от 0° до 60°.

13. Дан треугольник ABC, AH — его высота, AL — его биссектриса. Угол BAL в 4 раза меньше угла BAH и в 5 раз меньше угла ABH. Найдите величину угла C треугольника ABC.

Ответ: 30° или 110°.

Указание. Треугольник ABC — тупоугольный, точка H, основание высоты, лежит на продолжении стороны BC. Рассмотрите 2 случая порядка точек на прямой BC: H-B-L-C и H-C-L-B.

14. Дан треугольник ABC, угол B которого равен 70 градусов. Внутри отметили такую точку D, что угол ADC равен 130 градусов. Найдите величину (меньшего) угла между биссектрисами углов BAD и BCD.

Ответ: 80°.

Решение. Сумма углов при вершинах A и C в треугольнике ABC равна 180° – 70° = 110°, в треугольнике ACD — 180° – 130° = 50°. Не трудно заметить, что меры углов при этих вершинах в треугольнике, образованном AC и указанными биссектрисами, — среднее арифметическое мер углов при этих вершинах в треугольниках ABC и ACD. Значит, их сумма равна (110° + 50°) : 2 = 80°, угол треугольника между этими биссектрисами — 180° – 80°, а меньший угол между биссектрисами равен 80°.