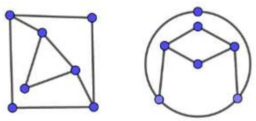
Блок 3. Графы и турниры

Интернет-карусели (2021–2022)

Задания

Напоминаем, что *граф* состоит из *вершин*, любые две из которых либо соединены одним *ребром*, либо не соединены. *Степень вершины* — количество выходящих из неё ребер.

1. В графе 57 ребер. В нём 15 вершин степени 4, 15 вершин степени 3, остальные N вершин имеют степень 1. Чему равно N?
2. В шахматном турнире сыграли пять шахматистов: Антонов, Борисов, Васильев, Глебов и Еленьев. Каждый с каждым сыграли ровно одну партию. За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью — 0,5 очков, за поражение — 0 очков. Антонов набрал 1 очко, Борисов — 2, Васильев — 0,5, Глебов — 3,5 очка. Какое место в турнире занял Еленьев?
3. Лёня, глядя на каркас куба, нарисовал граф. Его вершины обозначают грани куба. Вершины соединены, если соответствующие им грани соседние (имеют общее ребро). Сколько ребер получилось в графе у Лёни?
4. Лёня, глядя на каркас куба, нарисовал граф. Его вершины обозначают ребра куба. Вершины соединены ребром, если соответствующие им ребра куба имеют общую вершину. Сколько ребер получилось в графе у Лёни?
5. В футбольном турнире участвовали 5 команд, каждый две из которых сыграли друг с другом ровно один матч. За победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Все команды набрали разное число очков, а две лучшие команды в сумме набрали на 2 очка больше, чем в сумме остальные три. Сколько очков набрала команда, занявшая третье место?
6. Тимоша нарисовал *ориентированный граф*: отметил 13 точек, некоторые пары из них соединил стрелками. Между любыми двумя точками либо нет стрелок, либо одна стрелка, либо две стрелки, ведущие в разные стороны. Нет двух точек, из которых выходит поровну стрелок. Но во все точки приходит по N стрелок. Найдите N.
7. Один и тот же граф можно изобразить по-разному. Пусть даны два графа с n вершинами. Это один и тот же граф, если вершины обоих можно занумеровать числами от 1 до n так, что вершины в одном соединены ребром тогда и только тогда, когда во втором ребром соединены вершины с теми же номерами. Например, графы, изображенные на рисунке одинаковы. Сколько существует различных графов с 5 вершинами, каждая из которых имеет степень 2 или 3?



8. В футболе за победу дают 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0 очков. Команда «Буревестник» сыграла 18 матчей и набрала 18 очков. Во сколько раз больше она проиграла матчей, чем выиграла?
9. В графе 7 вершин. Шесть из них имеют степени 1, 2, 2, 3, 3, 4. Какую наибольшую степень может иметь седьмая вершина?
10. Каждую вершину графа покрасили в один из двух цветов: зеленый или желтый. Из каждой желтой вершины ребра идут только в зеленые вершины. Сумма степеней всех желтых вершин равна 20. В графе ровно 12 ребер, оба конца которых зеленые. Чему равна сумма степеней всех зеленых вершин?
11. Организаторы футбольного турнира 20 команд составляют расписание игр. Каждые две команды должны сыграть друг с другом ровно 1 раз. Игры проходят по турам, в каждом туре каждая команда играет 1 матч. На каждой игре одна команда играет «дома», а её соперник — «на выезде». Какое наибольшее количество туров у каждой команды могут чередоваться матчи «дома» и «на выезде»?
12. В некоторой стране каждые два города соединены одной дорогой с односторонним движением. Других дорог нет. Все дороги помечены буквами Ф (федеральная) и М (местная). Из города N выходит 4 дороги, а входит в город 5 дорог. Всего в стране 20 федеральных дорог. Сколько в стране местных дорог?
13. В шахматном турнире играют более трех шахматистов. Каждый с каждым должен сыграть одинаковое число раз. В турнире было 30 туров, в каждом туре каждый шахматист сыграл 1 партию. За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью 0,5 очков, за поражение 0 очков. После 13-го тура один из участников обнаружил, что у него нечетное число очков, а у других участников — четное число очков. Сколько шахматистов участвовало в турнире?
14. Прошёл школьный однокруговой футбольный турнир 4 команд. Каждая команда сыграла с каждым из соперников 1 раз. В таблице приведены итоги турнира: количество побед, ничьих, поражений, число забитых и пропущенных мячей у каждой команды. Сколько мячей было забито в матче Сокол–Орёл?

	Победы	Ничьи	Пораж.	Общий счёт
Ястреб	2	1	0	2:0
Сокол	1	1	1	2:1
Орёл	1	0	2	3:3
Колибри	0	2	1	0:3

15. В парламенте 3 левых, 4 правых депутатов и 7 центристов. На Новый Год некоторые представители разных партий обменялись конфетами. В каждом обмене участвовали два представителя разных партий. Каждый левый участвовал в 4 обменах, каждый правый — в 3-х, каждый центрист — в N разменах. Сколько обменов конфетами было между левыми и правыми, если $N > 0$?

Блок 3. Графы и турниры

Интернет-карусели (2021–2022)

Ответы, указания, решения

Напоминаем, что *граф* состоит из *вершин*, любые две из которых либо соединены одним *ребром*, либо не соединены. *Степень вершины* — количество выходящих из неё ребер.

1. В графе 57 ребер. В нём 15 вершин степени 4, 15 вершин степени 3, остальные N вершин имеют степень 1. Чему равно N?

   Ответ: 9.

   Решение. Сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер, то есть равна $2 \cdot 57 = 114$ и равна $15 \cdot 4 + 15 \cdot 3 + N \cdot 1 = 105 + N$. Тогда $N = 114 - 105$.

2. В шахматном турнире сыграли пять шахматистов: Антонов, Борисов, Васильев, Глебов и Еленьев. Каждый с каждым сыграли ровно одну партию. За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью — 0,5 очков, за поражение — 0 очков. Антонов набрал 1 очко, Борисов — 2, Васильев — 0,5, Глебов — 3,5 очка. Какое место в турнире занял Еленьев?

   Ответ: 2.

   Решение. Состоялось $5 \cdot 4 : 2 = 10$ партий, а каждой разыгрывалось одно очко. Четверо набрали $1 + 2 + 0{,}5 + 3{,}5 = 7$ очков. Значит, пятый набрал $10 - 7 = 3$ очка и занял 2 место.

3. Лёня, глядя на каркас куба, нарисовал граф. Его вершины обозначают грани куба. Вершины соединены, если соответствующие им грани соседние (имеют общее ребро). Сколько ребер получилось в графе у Лёни?

   Ответ: 12.

   Решение. У куба 6 граней, поэтому указанный граф имеет 6 вершин. Каждая грань имеет 4 соседние грани, поэтому степень каждой вершины равна 4. Такой граф имеет $6 \cdot 4 : 2 = 12$ ребер.

   Замечание. Не трудно заметить, что каждому ребру куба соответствует ребро описываемого графа.

4. Лёня, глядя на каркас куба, нарисовал граф. Его вершины обозначают ребра куба. Вершины соединены ребром, если соответствующие им ребра куба имеют общую вершину. Сколько ребер получилось в графе у Лёни?

   Ответ: 24.

   Решение. У куба 12 ребер, поэтому указанный граф имеет 12 вершин. Каждое ребро куба имеет общую вершину с четырьмя другими ребрами, поэтому степень каждой вершины равна 4. Такой граф имеет $12 \cdot 4 : 2 = 24$ ребра.

5. В футбольном турнире участвовали 5 команд, каждый две из которых сыграли друг с другом ровно один матч. За победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Все команды набрали разное число очков, а две лучшие команды в сумме набрали на 2 очка больше, чем в сумме остальные три. Сколько очков набрала команда, занявшая третье место?

   Ответ: 4.

   Решение. В однокруговом турнире 5 команд сыграно $5 \cdot 4 : 2 = 10$ матчей. В каждом матче распределялось 2 очка, поэтому командами было набрано 20 очков. Из условия следует, что две лучшие команды набрали 11 очков, оставшиеся три — 9. При этом все команды набрали разное число очков. Значит, вторая команда набрала не более 5 очков, третья — не более 4 очков.

   Если бы третья команда набрала 3 (или меньше) очков, то последние три команды набрали бы не более $3 + 2 + 1 = 6$ очков, что менее 9. Значит, третья команда набрала 4 очка.

   Комментарий. Для полного решения задачи не требуется приводить пример такого турнира, но это полезно сделать ученикам. Пример таблицы показан ниже.

Команда № 1	X	2	2	2	0	6
Команда № 2	0	X	2	1	2	5
Команда № 3	0	0	X	2	2	4
Команда № 4	0	1	0	X	2	3
Команда № 5	2	0	0	0	X	2

6. Тимоша нарисовал *ориентированный граф*: отметил 13 точек, некоторые пары из них соединил стрелками. Между любыми двумя точками либо нет стрелок, либо одна стрелка, либо две стрелки, ведущие в разные стороны. Нет двух точек, из которых выходит поровну стрелок. Но во все точки приходит по N стрелок. Найдите N.

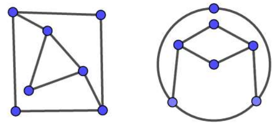
   Ответ: 6.

   Решение. Из вершины может выходить от 0 до 12 стрелок. Так как нет двух точек, из которых выходит поровну стрелок, то из вершин выходит 0, 1, 2, …, 12 стрелок, всего — $0 + 1 + \ldots + 12 = 78$. Так как из всех вершин входит по N стрелок, то $N = 78 : 13 = 6$.

7. Один и тот же граф можно изобразить по-разному. Пусть даны два графа с n вершинами. Это один и тот же граф, если вершины обоих можно занумеровать числами от

1 до n так, что вершины в одном соединены ребром тогда и только тогда, когда во втором ребром соединены вершины с теми же номерами.

Например, графы, изображенные на рисунке одинаковы.



Сколько существует различных графов с 5 вершинами, каждая из которых имеет степень 2 или 3?

Ответ: 4.

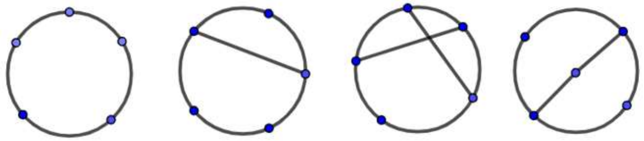
Указание. У графа нет висячих вершин, значит, есть цикл. Он может содержать 3, 4 или 5 вершин.

Пусть есть цикл, содержащий 5 вершин. Дополнительных ребер может не быть (вариант № 1), может быть одно ребро (вариант № 2) или два ребра (вариант № 3).

Пусть есть цикл, содержащий 4 вершины. Пятая вершина соединена с двумя вершинами цикла. Если эти вершины соседние, то есть цикл длины 5 (этот случай уже рассмотрен). Если вершины не соседние, то такой вариант только один (вариант № 4).

Пусть есть цикл, содержащий 3 вершины. Оставшиеся 2 вершины соединены с двумя вершинами цикла, иначе будет висячая вершина (степени 1). Если одна из «лишних» вершин или обе соединены с соседними вершинами цикла, то есть цикл большего размера (длины 4 или 5) — эти случаи рассмотрены ранее.

Итого 4 графа, показанные на рисунке.



№ 1 № 2 № 3 № 4

8. В футболе за победу дают 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0 очков. Команда «Буревестник» сыграла 18 матчей и набрала 18 очков. Во сколько раз больше она проиграла матчей, чем выиграла?

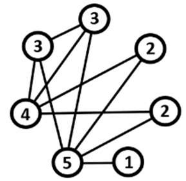
Ответ: 2.

Решение 1. Команда могла получить 18 очков, сыграв все матчи вничью. Если у неё только одна победа (она даёт на 2 очка больше, чем ничья), то должно быть 2 поражения. Если еще вместо ничьи будет победа, то еще 2 поражения, и так далее. Значит, команда проиграла вдвое больше игр, нежели выиграла.

Решение 2. Пусть выиграно В игр, проиграно П игр, остальные Н игр — ничья. Тогда В + Н + П = 18, 3В + Н = 18. Если из второго вычесть первое, то получим 2В – П = 0 или П = 2В. Значит, команда проиграла вдвое больше игр, нежели выиграла.

9. В графе 7 вершин. Шесть из них имеют степени 1, 2, 2, 3, 3, 4. Какую наибольшую степень может иметь седьмая вершина?

Ответ: 5.



Решение. Сумма степеней всех вершин чётна, сумма степеней данных вершин — нечётна. Значит, искомая степень вершины — нечётна. Она же не более 6. Значит, наибольшее возможное значение — 5. Это возможно, пример такого графа показан на рисунке справа.

10. Каждую вершину графа покрасили в один из двух цветов: зеленый или желтый. Из каждой желтой вершины ребра идут только в зеленые вершины. Сумма степеней всех желтых вершин равна 20. В графе ровно 12 ребер, оба конца которых зеленые. Чему равна сумма степеней всех зеленых вершин?

Ответ: 44.

Решение. Есть только ребра «ЖЗ» (с концами в желтой и зеленой вершинах) и ребра «ЗЗ» (оба конца — зеленые). Из условия ребер «ЖЗ» — 20 штук, ребер «ЗЗ» — 12 штук. Сумма степеней зеленых вершин 20 + 12 · 2 = 44.

11. Организаторы футбольного турнира 20 команд составляют расписание игр. Каждые две команды должны сыграть друг с другом ровно 1 раз. Игры проходят по турам, в каждом туре каждая команда играет 1 матч. На каждой игре одна команда играет «дома», а её соперник — «на выезде». Какое наибольшее количество туров у каждой команды могут чередоваться матчи «дома» и «на выезде»?

Ответ: 10.

Решение. После первого тура все команды разбиваются на 2 группы по 10 команд: в одной чередование начинается с домашнего матча, в другой — с выездного. Чтобы чередование сохранилось у всех команд, в каждом туре команда должна играть с командой из другой группы. Игра с одной командой из другой группы сыграна в первом туре, для остальных есть еще 9 туров, всего 10.

Турнир с 10 такими турами возможен. Пронумеруем команды в каждой группе номерами 1–1, 1–2, ..., 1–10 и 2–1, 2–2, ..., 2–10. В первом туре сыграют команды с одинаковыми номерами, группа № 1 — «дома», а № 2 — «на выезде». Во втором туре сыграют 1–1 и 2–2, 1–2 и 2–3, ..., 1–9 и 2–10, 1–10 и 2–1; группа № 1 — «на выезде», а № 2 — «дома». Далее соперников «сдвинем» еще раз и поменяем «дома» и «на выезде»: сыграют 1–1 и 2–3, 1–2 и 2–4, ..., 1–9 и 2–1, 1–10 и 2–2; группа № 1 — «дома», а № 2 — «на выезде». Продолжая так дальше, можно провести всего 10 туров. Далее пары будут повторяться.

12. В некоторой стране каждые два города соединены одной дорогой с односторонним движением. Других дорог нет. Все дороги помечены буквами Ф (федеральная) и М (местная). Из города N выходит 4 дороги, а входит в город 5 дорог. Всего в стране 20 федеральных дорог. Сколько в стране местных дорог?

    Ответ: 25.

    Решение. Из города N выходит 4 дороги, входит в город 5 дорог. Значит, он соединен с $4 + 5 = 9$ городами, а всего городов $9 + 1 = 10$.

    Каждые два города соединены одной дорогой. Если всего 10 городов, то количество дорог равно $10 \cdot 9 : 2 = 45$ дорог. Если из них 20 — федеральные, то остальные $45 - 20 = 25$ — местные.

13. В шахматном турнире играют более трех шахматистов. Каждый с каждым должен сыграть одинаковое число раз. В турнире было 30 туров, в каждом туре каждый шахматист сыграл 1 партию. За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью 0,5 очков, за поражение 0 очков. После 13-го тура один из участников обнаружил, что у него нечетное число очков, а у других участников — четное число очков. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

    Ответ: 6.

    Решение. Каждый сыграл 30 партий, у него было не менее трёх соперников. Число соперников — делитель числа 30, то есть 5, 6, 10, 15 или 30. Так как в туре играют двое, то общее число участников чётно. Значит, всего 6 или 16 участников.

    В каждой партии разыгрывается 1 очко. После 13 тура было сыграно нечётное число партий. Если игроков 6, то было $3 \cdot 13$ партий (нечётно), если 16 игроков — $8 \cdot 13$ партий (чётно). Второе невозможно.

14. Прошёл школьный однокруговой футбольный турнир 4 команд. Каждая команда сыграла с каждым из соперников 1 раз. В таблице приведены итоги турнира: количество побед, ничьих, поражений, число забитых и пропущенных мячей у каждой команды.

	Победы	Ничьи	Пораж.	Общий счёт
Ястреб	2	1	0	2:0
Сокол	1	1	1	2:1
Орёл	1	0	2	3:3
Колибри	0	2	1	0:3

Сколько мячей было забито в матче Сокол–Орёл?

Ответ: 2.

Указание: матч закончился со счётом 2:0.

Решение. У «Колибри» единственное поражение, баланс 0:3 может получиться только при поражении 0:3 и двух ничьих со счётом 0:0.

Три мяча забила только команда «Орёл», значит, «Орёл» выиграл «Колибри» со счётом 3:0, а два поражения команды «Орёл» были 0:1 и 0:2 — от «Сокола» и «Ястреба».

Если «Сокол» выиграл 1:0, то при поражении и ничьей был баланс мячей 1:1, что невозможно. Значит, «Сокол» выиграл «Орёл» со счётом 2:0.

15. В парламенте 3 левых, 4 правых депутатов и 7 центристов. На Новый Год некоторые представители разных партий обменялись конфетами. В каждом обмене участвовали два представителя разных партий. Каждый левый участвовал в 4 обменах, каждый правый — в 3-х, каждый центрист — в N разменах. Сколько обменов конфетами было между левыми и правыми, если $N > 0$?

    Ответ: 5.

    Решение. Левые отдали 12 конфет, правые отдали 12 конфет. Друг другу отдали поровну, значит, центристам отдали чётное количество. Так как 7 центристов получили поровну конфет, то отдано количество, кратное 7. Значит, левые и правые отдали центристам по 7 штук, а друг другу — по $12 - 7 = 5$ штук.