Блок 1. Многочлены

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

1. (а) Найдите степень многочлена $(2x^2+1)(x^3+2)^4$, (б) найдите его старший коэффициент и (в) свободный член.
2. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $(x^2-3x+1)^{100}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов.
3. Числа a, b, c таковы, что равенство $(x+3)(x^2+ax+4)=(x+b)(x^2+cx+12)$ является тождеством. Найдите сумму $a+b+c$.
4. Найдите все значения параметра a, при которых многочлен $x^3+6x^2+ax+12$ делится на многочлен $x+4$.
5. Найдите остаток от деления $x^{100}+x+1$ на (а) $x+1$, (б) x^2+x-2.
6. Пусть $P(x)=(2x^2-2x\ +1)^{17}\cdot(3x^2-3x\ +1)^{17}$. Найдите (а) сумму коэффициентов этого многочлена; (б) суммы коэффициентов при чётных и нечётных степенях x.
7. Докажите, что если в выражении $(x^2-x+1)^{2021}$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то какой-нибудь коэффициент полученного многочлена будет отрицательным.
8. (а) Найдите все значения параметра a, при которых многочлен $x^{57}+ax^5+7$ делится на многочлен $x+1$.

   (б) Найдите все значения параметров a и b, при которых $x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ делится на $(x-1)(x-2)$.
9. Значение многочлена $P(x)$ при любом целом x — целое число. Верно ли, что все его коэффициенты являются целыми числами?
10. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что для некоторых целых a и b выполняется $P(a)-P(b)=1$. Докажите, что a и b различаются на 1.
11. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(6)=5$ и $P(14)=9$.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

Блок 1. Многочлены

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

1. (а) Найдите степень многочлена $(2x^2+1)(x^3+2)^4$, (б) найдите его старший коэффициент и (в) свободный член.
2. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $(x^2-3x+1)^{100}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов.
3. Числа a, b, c таковы, что равенство $(x+3)(x^2+ax+4)=(x+b)(x^2+cx+12)$ является тождеством. Найдите сумму $a+b+c$.
4. Найдите все значения параметра a, при которых многочлен $x^3+6x^2+ax+12$ делится на многочлен $x+4$.
5. Найдите остаток от деления $x^{100}+x+1$ на (а) $x+1$, (б) x^2+x-2.
6. Пусть $P(x)=(2x^2-2x\ +1)^{17}\cdot(3x^2-3x\ +1)^{17}$. Найдите (а) сумму коэффициентов этого многочлена; (б) суммы коэффициентов при чётных и нечётных степенях x.
7. Докажите, что если в выражении $(x^2-x+1)^{2021}$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то какой-нибудь коэффициент полученного многочлена будет отрицательным.
8. (а) Найдите все значения параметра a, при которых многочлен $x^{57}+ax^5+7$ делится на многочлен $x+1$.

   (б) Найдите все значения параметров a и b, при которых $x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ делится на $(x-1)(x-2)$.
9. Значение многочлена $P(x)$ при любом целом x — целое число. Верно ли, что все его коэффициенты являются целыми числами?
10. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что для некоторых целых a и b выполняется $P(a)-P(b)=1$. Докажите, что a и b различаются на 1.
11. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(6)=5$ и $P(14)=9$.

karusel.desc.ru ~ 3 ~

Блок 1. Многочлены

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

В данном занятии предлагаем рассмотреть основные понятия, связанные с многочленами, деление многочленов, теорему Безу. Последние задачи связаны с целочисленными многочленами, в частности используется теорема Безу для целочисленных многочленов.

- Многочлен от одной переменной — алгебраическое выражения вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ — действительные числа, $a_n \neq 0$.

Множество многочленов с действительными коэффициентами обозначают $\mathbb{R}[x]$.

Число n называется *степенью многочлена*. Обозначают $n = \deg P(x)$. В частности, многочлены нулевой степени — это действительные числа, многочлены первой степени — линейные функции вида $kx + b, k \neq 0$, многочлены второй степени — квадратные трехчлены.

Число a_0 называют *свободным членом*, число a_n — *старшим коэффициентом*. Многочлен называется *приведённым*, если его старший коэффициент равен единице.

1. (а) Найдите степень многочлена $(2x^2+1)(x^3+2)^4$, (б) найдите его старший коэффициент и (в) свободный член.

   Ответ: (а) 14, (б) 2, (в) 16.

2. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $(x^2-3x+1)^{100}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

   Ответ: 1.

   Указание. Естественно, представлять этот многочлен в стандартном виде очень сложно, в нём много слагаемых. Используем то, что можно подставлять в данное выражение значения x и находить результат.

   Решение. Заметим, сумма всех коэффициентов равна значению многочлена при $x = 1$, то есть $(1^2 - 3\cdot 1 + 1)^{100} = 1$.

- Следствием *основной теореме алгебры* является утверждение, что любой многочлен однозначно[1] раскладывается на множители — многочлены первой степени и многочлены второй степени, не имеющие действительных корней.

[1] Разложение единственно в следующем смысле: если многочлен $a(x)$ раскладывается в произведение указанных многочленов как $A(x) = P_1(x) \dots P_n(x) = Q_1(x) \dots Q_m(x)$, то $m = n$ и многочлены $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$ можно переставить местами таким образом, что

Например, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 3x + 4)$.

3. Числа a, b, c таковы, что равенство $(x+3)(x^2+ax+4) = (x+b)(x^2+cx+12)$ является тождеством. Найдите сумму $a+b+c$.

   Ответ: 13.

   Решение. Многочлен $P(x) = (x+3)(x^2+ax+4) = (x+b)(x^2+cx+12)$ имеет заведомо разные множители (x^2+ax+4) и $(x^2+cx+12)$.

   Тогда $(x+3)$ — делитель $(x^2+cx+12)$. Значит, по свободному члену 12 можно определить, что $(x^2+cx+12) = (x+3)(x+4)$, откуда $c = 7$.

   Тогда имеется делитель $(x+4)$, на который делится x^2+ax+4. По свободному члену 4 можно определить, что $x^2+ax+4 = (x+1)(x+4)$, откуда $a = 5$.

   Так как у многочлена $P(x)$ есть множитель $(x+1)$, то $b = 1$.

   Получаем $(x+3)(x+4) = (x+1)(x^2+7x+12) = (x+3)(x^2+5x+4)$, откуда находим $a+b+c = 5+1+7 = 13$.

- Многочлены можно делить друг на друга с остатком, что похоже на деление натуральных чисел.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x + 1 & 2x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ \hline \quad -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 & \\ \quad -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & \\ \hline \qquad -\frac{9}{4}x + \frac{5}{4} & \end{array}$$

Разделить многочлен $A(x)$ на многочлен $D(x)$, где $\deg D(x) \geq 1$, с остатком — значит найти два таких многочлена $Q(x)$ и $R(x)$, что $A(x) = Q(x)\cdot D(x) + R(x)$ и $\deg R(x) < \deg D(x)$.

Справа показано, как $x^3 - 2x + 1$ делят с остатком на $2x^2 + x + 1$. Получают частное $q(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, а остаток $r(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{5}{4}$.

При этом выполнено $x^3 - 2x + 1 = (2x^2+x+1)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{9}{4}x + \frac{5}{4}\right)$.

Комментарий. Предложите ученикам поделить произвольно написанным многочлены друг на друга.

4. Найдите все значения параметра a, при которых многочлен $x^3 + 6x^2 + ax + 12$ делится на многочлен $x + 4$.

   Ответ: $a = 11$.

отношение любых двух многочленов, стоящих на одинаковых местах в разложениях, будет равно отличному от нуля числу.

Решение 1. Можно решить задачу, сымитировав деление столбиком:
$x^3+6x^2+ax+12=x^2(x+4)+2x^2+ax+12=$
$=x^2(x+4)+2x(x+4)+(a-8)x+12.$

Не трудно заметить, что $(a-8)x+12$ должен быть равен $3x+12=3(x+4)$. При этом $a=11$.

Решение 2. Пусть $x^3+6x^2+ax+12=(x+4)\cdot Q(x)$. Заметим, при $x=-4$ правая часть равна 0, получаем $(-4)^3+6\cdot(-4)^2+a\cdot(-4)+12=0$, $44-4a=0$, $a=11$.

Комментарий. Разложите $x^3+6x^2+11x+12$ на множители, тем самым проверьте правильность ответа, $x^3+6x^2+11x+12=(x+4)(x^2+2x+3)$.

- Из формулы деления многочленов с остатком следует теорема Безу: остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x-a)$ равен значению $P(a)$. Действительно, остаток при делении многочлена на $(x-a)$ — число. Подставляя в соотношение $P(x)=Q(x)\cdot(x-a)+r$ значение $x=a$ получаем $r=P(a)$, что и требовалось доказать.

5. Найдите остаток от деления $x^{10}\ \ +x+1$ на (а) $x+1$, (б) x^2+x-2.

(а) Ответ: 1.

Решение. Согласно теореме Безу, остаток равен $(-1)^{100}+(-1)+1=1$.

(б) Ответ: $\frac{4-2^{100}}{3}x+\frac{2^{100}+5}{3}$.

Решение. Проведем рассуждения, похожие на доказательство теоремы Безу. Степень многочлена-делителя равна 2, поэтому степень многочлена-остатка равно 0 или 1, то есть он представим в виде $ax+b$.

Имеет место тождество $x^{100}+x+1=Q(x)\cdot(x^2+x-2)+(ax+b)$. Подставим в него значения x, при которых $x^2+x-2=0$, то есть $x=1$ и $x=-2$.

При $x=1$ имеем $a+b=3$, при $x=-2$ имеем $-2a+b=2^{100}-1$. Решая систему из этих соотношений, получаем $a=(4-2^{100})/3$, $b=(2^{100}+5)/3$.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Пусть $P(x)=(2x^2-2x\ +1)^{17}\cdot(3x^2-3x\ +1)^{17}$. Найдите (а) сумму коэффициентов этого многочлена; (б) суммы коэффициентов при чётных и нечётных степенях x.

Ответ: (а) 1; (б) $(1+35^{17})/2$, $(1-35^{17})/2$.

Решение. Сумма коэффициентов равна $P(1)=1$. Заметим, что $p(-1)$ — сумма, в которой коэффициенты при чётных степенях взяты со знаком «+», при нечётных — со знаком «–».

Тогда сумма коэффициентов при чётных степенях равна

$$\frac{P(1)+P(-1)}{2}=\frac{1+5^{17}\cdot 7^{17}}{2}=\frac{1+35^{17}}{2};$$

сумма коэффициентов при уtчётных степенях равна

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2}=\frac{1-5^{17}\cdot 7^{17}}{2}=\frac{1-35^{17}}{2}.$$

7. Докажите, что если в выражении $(x^2-x+1)^{2021}$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то какой-нибудь коэффициент полученного многочлена будет отрицательным.

Решение 1. Найдём коэффициент при x в полученном многочлене. Подобные слагаемые с буквенной частью x образуются при перемножении 2021 одинаковых скобок следующим образом: в одной из скобок берется слагаемое $(-x)$, а в остальных скобках — слагаемое 1. Следовательно, коэффициент при x будет равен –2021.

Решение 2. Сумма коэффициентов полученного многочлена равна его значению при $x=1$, то есть $(1^2-1+1)^{2021}=1$. Но в этом многочлене есть коэффициенты, сумма которых уже более 1 (например, коэффициент при x^{4042} и свободный член равны 1). Следовательно, должен быть хотя бы один отрицательный коэффициент.

8. (а) Найдите все значения параметра a, при которых многочлен $x^{57}+ax^5+7$ делится на многочлен $x+1$.

(б) Найдите все значения параметров a и b, при которых $x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ делится на $(x-1)(x-2)$.

(а) Ответ: 6.

Указание. Данный многочлен делится на $x+1$, если число $x=-1$ является его корнем. Тогда $(-1)^{57}+a(-1)^5+7=0$, $6-a=0$, $a=6$.

(б) Ответ: $a=-3$, $b=2$.

Решение. Данный многочлен делится на $(x-1)(x-2)$, если числа 1 и 2 являются его корнями. Подставляя их, получаем $a+b+1=0$, $2a+b+4=0$, откуда $a=-3$, $b=2$.

9. Значение многочлена $P(x)$ при любом целом x — целое число. Верно ли, что все его коэффициенты являются целыми числами?

Ответ: не верно.

Решение. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x = \frac{x(x-1)(x+1)}{3}.$$

При любом целом x одно из чисел $(x-1), x, (x+1)$ кратно трём, поэтому значение $P(x)$ — целое число.

Комментарий. Можно предложить ученикам подобным образом сконструировать еще несколько многочленов. Например, подойдут такие:

$$\frac{x(x-1)(x+1)}{6}, \qquad \frac{x(x-1)(x+1)(x+2)}{8}.$$

10. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что для некоторых целых a и b выполняется $P(a) - P(b) = 1$. Докажите, что a и b различаются на 1.

Указание. Значение многочлена с целыми коэффициентами при целом x — целое число. В данном случае удобно факт, называемый *теоремой Безу для целочисленных многочленов*: для любых целых a и b разность $P(a) - P(b)$ будет кратна числу $a - b$.

Пусть $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$.
Тогда $P(a) - P(b) = c_n(a^n - b^n) + c_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \dots + c_1(a - b)$.
При любом $k > 1$ выполнено
$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + b^{k-1})$,
поэтому $P(a) - P(b)$ кратно $a - b$.
Теорема доказана.

Решение. Согласно теореме Безу для целочисленных многочленов, $P(a) - P(b)$ кратно $|a - b|$. Значит, $|a - b|$ — делитель числа 1, то есть $|a - b| = 1$.

11. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(6) = 5$ и $P(14) = 9$.

Решение. Согласно теореме Безу для целочисленных многочленов, если бы существовал такой многочлен $P(x)$, то разность $P(14) - P(6) = 9 - 5 = 4$ была бы кратна числу 14 – 6 = 8, что неверно.