Блок 11. Комбинаторика

Интернет-карусель (2021–2022)

Условия задач

1. ***Шеренга***. Воспитатель младшей группы детского сада на праздновании Нового Года должна поставить в ряд Антона, Борю, Васю и Гену. Она знает, что Антона и Борю нельзя ставить рядом друг с другом. Сколькими способами она может поставить в шеренгу из этих четырёх ребят?

2. ***Шеренга***. Воспитатель средней группы детского сада на праздновании Нового Года должна поставить в ряд Антона, Борю, Васю и Гену. Она знает, что Антона и Борю нельзя ставить рядом друг с другом, а также нельзя ставить рядом Васю с Геной. Сколькими способами она может поставить в шеренгу из этих четырёх ребят?

3. ***Шеренга***. Воспитатель старшей группы детского сада на праздновании Нового Года должна поставить в ряд Антона, Борю, Васю, Гену и Диму. Она знает, что Антона и Борю нельзя ставить рядом друг с другом, а также нельзя ставить рядом Васю с Геной. Сколькими способами она может поставить в шеренгу из этих пятерых ребят?

4. ***Далёкие клетки***. Сколькими способами можно закрасить 2 клетки (одну — красным цветом, другу — синим) в белом клетчатом квадрате 3×3, чтобы закрашенные клетки не граничили ни стороной, ни вершиной? Варианты, совмещаемые при поворотах квадрата, считать различными.

5. ***Далёкие клетки***. Сколькими способами можно закрасить *чёрным* цветом 2 клетки в белом клетчатом квадрате 3×3, чтобы закрашенные клетки не граничили ни стороной, ни вершиной? Варианты, совмещаемые при поворотах квадрата, считать различными.

6. ***Далёкие клетки***. Сколькими способами можно закрасить *чёрным* цветом 2 клетки в белом клетчатом квадрате 4×4, чтобы закрашенные клетки не граничили ни стороной, ни вершиной? Варианты, совмещаемые при поворотах квадрата, считать различными.

7. ***Танцы***. В танцевальном ансамбле 5 мальчиков и 9 девочек, и все прекрасно танцуют. Сколькими способами можно выбрать одну пару (мальчик и девочка) для выступления на конкурсе, если Аня ни за что не будет танцевать с Макаром, а Белла — с Игнатом?

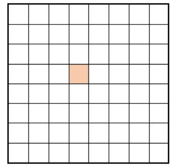
8. ***Танцы***. В танцевальном ансамбле 5 мальчиков и 9 девочек, и все прекрасно танцуют. Сколькими способами можно выбрать две пары (мальчик и девочка) для выступления на конкурсе?

9. ***Танцы***. В танцевальном ансамбле 5 мальчиков и 9 девочек, и все прекрасно танцуют. Сколькими способами можно выбрать две пары (мальчик и девочка) для выступления на конкурсе, если Аня ни за что не будет танцевать с Макаром?

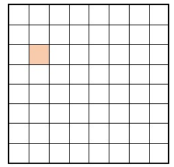
10. ***Квартиры***. В новом доме номера квартир от 1 до 100. Фирме “Цифры” заказали изготовление номеров квартир. За каждую цифру фирма берет по 3 рубля. Сколько будет стоить весь набор номеров от 1 до 100?

11. ***Квартиры***. В новом доме номера квартир от 1 до 299. Фирме “Цифры” заказали изготовление номеров квартир. За цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7 фирма берет по 3 рубля, за цифры 0, 6, 8, 9 — по 5 рублей. Сколько будет стоить весь набор номеров от 1 до 299?

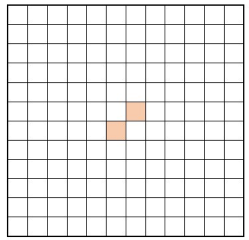
12. ***Наклейки***. Сколькими способами можно накрыть 16 клеток квадрата 8×8 квадратом 4×4, чтобы была накрыта клетка, отмеченная на рисунке?

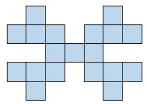


13. ***Наклейки***. Сколькими способами можно накрыть 25 клеток квадрата 8×8 квадратом 5×5, чтобы была накрыта клетка, отмеченная на рисунке?

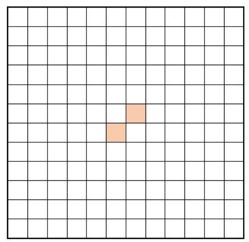


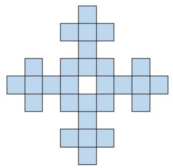
14. ***Наклейки***. У Тимоши есть клетчатый квадрат 12×12, у которого две отмеченные клетки намазаны клеем. Ему нужно приклеить голубую снежинку так, чтобы клетки снежинки совпали с клетками квадрата, а снежинка приклеилась двумя клетками. Снежинку и доску нельзя поворачивать. Сколькими способами он может это сделать?





15. ***Наклейки***. У Тимоши есть клетчатый квадрат 12×12, у которого 2 отмеченные клетки намазаны клеем. Ему нужно приклеить голубую снежинку так, чтобы клетки снежинки совпали с клетками квадрата, а снежинка приклеилась двумя клетками. Снежинку и доску нельзя поворачивать. Сколькими способами он может это сделать?





Блок 11. Комбинаторика

Интернет-карусель (2021–2022)

Условия, ответы, решения и указания

Вариант заданий интернет-карусели состоит из 5 групп заданий, близких по формулировке, которые условно названы «Шеренга», «Далёкие клетки», «Танцы», «Квартиры» и «Наклейки». В каждой группе задания идут по возрастанию сложности.

В решениях задач используются самые простые правила: перебор вариантов, сложение вариантов, умножение вариантов, метод дополнения и деление пополам.

Перебор, правила сложения и умножения, дополнение показаны в решениях задач № 1, № 2 и № 3. Деление пополам иллюстрируют задачи № 4 и № 5.

К некоторым задачам приведены разные способы подсчёта. К задаче № 3 приведены неверные решения, ошибки в которых очень полезно понять.

1. ***Шеренга***. Воспитатель младшей группы детского сада на праздновании Нового Года должна поставить в ряд Антона, Борю, Васю и Гену. Она знает, что Антона и Борю нельзя ставить рядом друг с другом. Сколькими способами она может поставить в шеренгу из этих четырёх ребят?

   Ответ: 12.

   Замечание. Все расположения, упорядоченные «по алфавиту»: АВБГ, АВГБ, АГБВ, АГВБ, БВАГ, БВГА, БГАВ, БГВА, ВАГБ, ВБГА, ГАВБ, ГБВА.

   Решение (перебор). Выпишем варианты, как могут стоять в шеренге Антон и Боря, заменяя остальных звёздочками. Если Антон стоит раньше Бори, то варианты таковы: А∗Б∗, А∗∗Б, ∗А∗Б. Еще 3 варианта, когда Боря стоит раньше Антона. В каждом из $3 + 3 = 6$ случаев Васю и Гену можно поставить 2 способами. Итого $6 \cdot 2 = 12$ вариантов шеренги.

   Решение (дополнение). Поставить четверых в шеренгу можно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами. Найдем количество вариантов, когда Антон и Боря стоят рядом. Поставить пару Антона с Борей и еще двоих ребят можно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами. С учётом того, что в паре Антон и Боря могут стоять 2 способами, то всего $2 \cdot 6 = 12$ неподходящих вариантов. Итого $24 - 12 = 12$ способов.

2. ***Шеренга***. Воспитатель средней группы детского сада на праздновании Нового Года должна поставить в ряд Антона, Борю, Васю и Гену. Она знает, что Антона и Борю нельзя ставить рядом друг с другом, а также нельзя ставить рядом Васю с Геной. Сколькими способами она может поставить в шеренгу из этих четырёх ребят?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2021–2022 учебный год

   Ответ: 8.

   Решение (перебор). Выпишем варианты, как могут стоять в шеренге Антон и Боря, заменяя остальных звёздочками. При этом два оставшихся места не находятся рядом. Если Антон стоит раньше Бори, то варианты таковы: А∗Б∗, ∗А∗Б. Еще 2 варианта, когда Боря стоит раньше Антона. В каждом из $2 + 2 = 4$ случаев Васю и Гену можно поставить 2 способами. Итого $4 \cdot 2 = 8$ вариантов шеренги.

   Замечание. Заметим, что из 12 вариантов, полученных в предыдущей задаче, не подходят четыре: АВГБ, АГВБ, БВГА и БГВА. Остаётся $12 - 4 = 8$ вариантов.

3. ***Шеренга***. Воспитатель старшей группы детского сада на праздновании Нового Года должна поставить в ряд Антона, Борю, Васю, Гену и Диму. Она знает, что Антона и Борю нельзя ставить рядом друг с другом, а также нельзя ставить рядом Васю с Геной. Сколькими способами она может поставить в шеренгу из этих пятерых ребят?

   Ответ: 48.

   «Решение» 1. Антона, Борю, Васю, Гену можно поставить 8 способами (см. предыдущую задачу). В каждом из этих вариантов 5 способов поставить Диму. Итого $8 \cdot 5 = 40$ вариантов.

   Комментарий. Это решение не верно, так как «хорошая» шеренга может получиться не только из «хорошей». При добавлении в шеренгу Димы из «плохой» расстановки может получиться «хорошая». Например, из А<u>ВГ</u>Б получается АВДГБ.

   Решение 1 (перебор). Заменим первую пару (Антон и Боря) цифрами 1, вторую (Вася и Гена) — цифрами 2. Получаем расположения (упорядочим по положению Димы): Д1212, Д2121; 1Д212, 2Д121; 12Д12, 21Д21, 12Д21, 21Д12, еще 2 варианта ∗∗∗Д∗, еще 2 варианта ∗∗∗∗Д. Итого $2 + 2 + 4 + 2 + 2 = 12$ вариантов. В каждой паре 2 варианта расположения, всего $2 \cdot 2 \cdot 12 = 48$ способов.

   «Решение» 2. Всего $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ вариантов поставить в шеренгу пятерых ребят. Найдём количество «плохих» расстановок: переставить места для 2 пар и Димы можно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами, на место пары мальчики (Антон и Боря или Вася и Гена) ставятся 2 способами, всего $2 \cdot 2 \cdot 6=24$ «плохих» расположения. Тогда «хороших» расположений всего $120 - 24 = 96$ штук.

   Комментарий. «Плохие» — это не только те шеренги, где есть обе пары АБ и ВГ (они в решении и считаются), а где есть хотя бы одна пара. От того и получен ответ, который больше верного.

   «Решение» 3. Всего $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ вариантов поставить в шеренгу пятерых ребят. Найдём количество «плохих» расстановок, где Антон и Боря оказались рядом. Перестановок мест для 1 пары и трех остальных всего $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Саму пару можно поставить 2 способами: АБ или БА. Итого 24 · 2 = 48 вариантов. Нетрудно понять, что шеренг с рядом стоящими Васей и Геной также 48. Итого 48 · 2 = 96 «плохих» вариантов. Остается 120 – 96 = 24 «хороших» вариантов.

Комментарий. «Плохие» варианты, где есть обе запрещенные пары, вычли из общего количества 2 раза. От того и получен ответ, который меньше верного.

Решение 2 (дополнение). Всего 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120 вариантов поставить в шеренгу пятерых ребят.

Найдём количество «плохих» расстановок, где Антон и Боря оказались рядом. Перестановок мест для 1 пары и трех остальных всего 4 · 3 · 2 · 1 = 24. Саму пару можно поставить 2 способами: АБ или БА. Итого 24 · 2 = 48 вариантов. Не трудно понять, что шеренг с рядом стоящими Васей и Геной также 48.

Найдём количество «плохих» расстановок, где есть обе запрещенные пары. Переставить места для 2 пар и Димы можно 3 · 2 · 1 = 6 способами, на место пары мальчики (Антон и Боря или Вася и Гена) ставятся 2 способами, всего 2 · 2 · 6 = 24 «плохих» расположения.

Так как «плохие» с обеими запрещенными парами учтены в каждом из вариантов с одной запрещенной парой, то всего 48 + 48 – 24 = 72 «плохих» варианта. Тогда «хороших» вариантов всего 120 – 72 = 48.

4. ***Далёкие клетки***. Сколькими способами можно закрасить 2 клетки (одну — красным цветом, другу — синим) в белом клетчатом квадрате 3×3, чтобы закрашенные клетки не граничили ни стороной, ни вершиной? Варианты, совмещаемые при поворотах квадрата, считать различными.

Ответ: 32.

Решение. Несложно для каждой клетки указать, сколько покрасок, когда она оказалась красной: если красная — угловая, то для синей клетки 5 возможностей, если красная клетка у края (но не в углу), то 3 возможности, центральная клетка не может быть синей или красной. Искомое количество — сумма полученных чисел, она равна 32.

5	3	5
3	0	3
5	3	5

5. ***Далёкие клетки***. Сколькими способами можно закрасить *чёрным* цветом 2 клетки в белом клетчатом квадрате 3×3, чтобы закрашенные клетки не граничили ни стороной, ни вершиной? Варианты, совмещаемые при поворотах квадрата, считать различными.

Ответ: 16.

Решение. Количество указанных окрасок двух клеток в одинаковый цвет вдвое меньше количества окрасок этих клеток в разные цвета. С учётом решения предыдущей задачи, искомое число равно 32 : 2 = 16.

6. ***Далёкие клетки***. Сколькими способами можно закрасить *чёрным* цветом 2 клетки в белом клетчатом квадрате 4×4, чтобы закрашенные клетки не граничили ни стороной, ни вершиной? Варианты, совмещаемые при поворотах квадрата, считать различными.

Ответ: 78.

12	10	10	12
10	7	7	10
10	7	7	10
12	10	10	12

Решение. Несложно для каждой клетки указать, сколько покрасок двух клеток в разные цвета (красный и синий), когда она оказалась красной: если красная — угловая, то для синей клетки 12 возможностей; если красная клетка у края (но не в углу), то 10 возможностей, если центральная клетка — 7 вариантов. Сумма полученных чисел равна 156.

Количество указанных окрасок двух клеток в одинаковый цвет вдвое меньше количества окрасок этих клеток в разные цвета. Поэтому искомое число равно 156 : 2 = 78.

7. ***Танцы***. В танцевальном ансамбле 5 мальчиков и 9 девочек, и все прекрасно танцуют. Сколькими способами можно выбрать одну пару (мальчик и девочка) для выступления на конкурсе, если Аня ни за что не будет танцевать с Макаром, а Белла — с Игнатом?

Ответ: 43.

Решение. Выбрать одного мальчика из пяти, а затем выбрать одну девочку из девяти можно 5 · 9 = 45 способами. Два варианта не подходят (Аня с Макаром и Белла с Игнатом). Остается 45 – 2 = 43 способа.

8. ***Танцы***. В танцевальном ансамбле 5 мальчиков и 9 девочек, и все прекрасно танцуют. Сколькими способами можно выбрать две пары (мальчик и девочка) для выступления на конкурсе?

Ответ: 720.

Решение 1. Выбор 2 мальчиков — 5 · 4 : 2 = 10 способов, выбор 2 девочек — 9 · 8 : 2 = 36 способов. Если танцоры выбраны, то пары можно собрать 2 способами. Всего 36 · 10 · 2 = 720 вариантов.

Решение 2. Первую пару можно выбрать 5 · 9 способами, вторую (из оставшихся 4 мальчиков и 8 девочек) — 4 · 8 способами. Заметим, что каждую пару пар мы нашли 2 раза. Поэтому всего (5 · 9) · (4 · 8) : 2 = 720 способов.

9. ***Танцы***. В танцевальном ансамбле 5 мальчиков и 9 девочек, и все прекрасно танцуют. Сколькими способами можно выбрать две пары (мальчик и девочка) для выступления на конкурсе, если Аня ни за что не будет танцевать с Макаром?

Ответ: 688.

Решение. Набрать 2 пары можно 720 способами. Количество вариантов, когда одна из пар — Аня и Макар, — количество способов набрать 1 пару из 4 мальчиков и 8 девочек, то есть $4 \cdot 8 = 32$ варианта. Итого $720 - 32 = 688$.

10. ***Квартиры***. В новом доме номера квартир от 1 до 100. Фирме “Цифры” заказали изготовление номеров квартир. За каждую цифру фирма берет по 3 рубля. Сколько будет стоить весь набор номеров от 1 до 100?

Ответ: 576

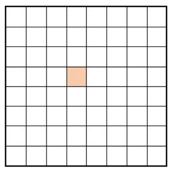
Решение. Всего 9 однозначных номеров, 1 номер — трёхзначный и 90 номеров — двузначные. Всего $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 192$ цифры, искомая стоимость — $192 \cdot 3 = 576$ рублей.

11. ***Квартиры***. В новом доме номера квартир от 1 до 299. Фирме “Цифры” заказали изготовление номеров квартир. За цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7 фирма берет по 3 рубля, за цифры 0, 6, 8, 9 — по 5 рублей. Сколько будет стоить весь набор номеров от 1 до 299?

Ответ: 2825.

Решение. В разряде единиц все цифры используются по $300 : 10 = 30$ раз, кроме «0», использованного 29 раз. Они стоят $30 \cdot (3 \cdot 6 + 4 \cdot 5) - 5 = 1135$ рублей.
В разряде десятков «0» используется 20 раз, остальные — по 30 раз. Они стоят $30 \cdot (3 \cdot 6 + 5 \cdot 3) + 20 \cdot 5 = 1090$ рублей.
В разряде сотен по 100 цифр «1» и «2», они стоят $300 + 300 = 600$ рублей.
Итого $1135 + 1090 + 600 = 2825$ рублей.

12. ***Наклейки***. Сколькими способами можно накрыть 16 клеток квадрата 8×8 квадратом 4×4, чтобы была накрыта клетка, отмеченная на рисунке?



Ответ: 16.

Решение. Отмеченная клетка расположена так, что она может быть накрыта любой клеткой квадрата 4×4. Значит, всего $4 \cdot 4 = 16$ способов.

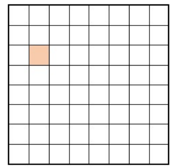
Комментарий. Решение этой задачи можно сравнить с решением задачи, которая предлагалась на «Математическом Празднике» в 2001 году (автор — А. Х. Шень). Здесь ситуация сложнее, так как фигура в условии несимметричная.

В стене имеется маленькая дырка (точка). У хозяина есть флажок следующей формы (см. рисунок). Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь, так чтобы флажок закрывал дырку.

Ответ: на рисунке ниже.

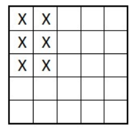
Решение. Если флажок, подвешенный в точке B, закрывает дырку A, то центрально симметричная относительно середины AB фигура закрывает точку B (и наоборот). Эта симметричная фигура всегда одна и та же — она и будет ответом.

13. ***Наклейки***. Сколькими способами можно накрыть 25 клеток квадрата 8×8 квадратом 5×5, чтобы была накрыта клетка, отмеченная на рисунке?



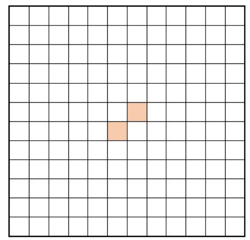
Ответ: 6.

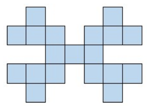
Решение 1. Квадрат 5×5 может быть расположен в верхнем левом углу квадрата 8×8. Далее его можно сдвинуть только на 1 клетку вправо и/или на 1 или 2 клетки вниз. Всего 2 положения по горизонтали и 3 положения по вертикали, итого $2 \cdot 3 = 6$ способов.



Решение 2. Отмеченная клетка расположена так, что она может быть накрыта только клетками квадрата 5×5, отмеченные на рисунке крестиками. Значит, всего $2 \cdot 3 = 6$ способов.

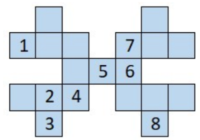
14. ***Наклейки***. У Тимоши есть клетчатый квадрат 12×12, у которого 2 отмеченные клетки намазаны клеем. Ему нужно приклеить голубую снежинку так, чтобы клетки снежинки совпали с клетками квадрата, а снежинка приклеилась 2 клетками. Снежинку и доску нельзя поворачивать. Сколькими способами он может это сделать?





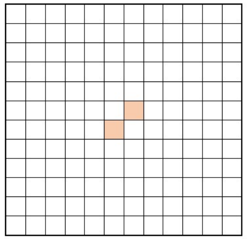
Ответ: 8.

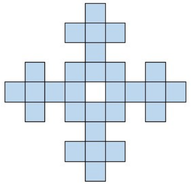
Решение. Отмеченные клетки расположены так, что они могут быть накрыты любой парой так же расположенных клеток на снежинке.



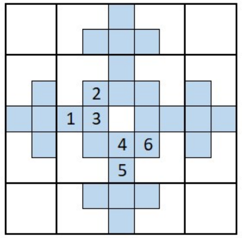
На рисунке справа пронумерованы клетки снежинки, которые могут накрыть нижнюю клетку из отмеченных на квадрате 12×12. Всего 8 вариантов.

15. ***Наклейки***. У Тимоши есть клетчатый квадрат 12×12, у которого 2 отмеченные клетки намазаны клеем. Ему нужно приклеить голубую снежинку так, чтобы клетки снежинки совпали с клетками квадрата, а снежинка приклеилась 2 клетками. Снежинку и доску нельзя поворачивать. Сколькими способами он может это сделать?





Ответ: 6.



Замечание. В отличие от предыдущей задачи, снежинка большая: не любые клетки, расположенные на снежинке как клетки с клеем, могут быть приклеены.

Решение. Приклеенными могут быть только такие клетки снежинки, которые не далее седьмой строки или столбца от края. На рисунке эти клетки оказываются в центральном квадрате 5×5.

На рисунке справа пронумерованы клетки снежинки, которые могут накрыть нижнюю клетку из отмеченных на квадрате 12×12. Всего 6 вариантов.