Блок 1. Системы уравнений

Интернет-карусель 2021–2022

Задания

1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 33 263. Площади двух из его граней равны 899 и 1 147. Чему равна площадь грани, не равной тем двум?

2. Числа a, b, c, d — решение системы.

   $$\begin{cases} 2a + 3b + 4c + 5d = 21, \\ 3a + 6b + 4c + 2d = 32, \\ 5a + 3b + 3c + 4d = 45, \\ 4a + 2b + 3c + 3d = 56. \end{cases}$$

   Найдите сумму $a + b + c + d$.

3. Каждая клетка клетчатого квадрата 28×28 покрашена в один из трёх цветов: красный, белый или синий. Красных клеток — 250, белых — 300. Любые две соседние (по стороне) клетки разного цвета. Квадрат разрезали на прямоугольники из двух клеток. Сколько могло получиться красно-белых частей?

4. В вершинах квадрата записано по одному целому числу. Сумма любых двух чисел в вершинах, соединенных стороной, равна 57 или 58. Чему равна сумма всех чисел в вершинах?

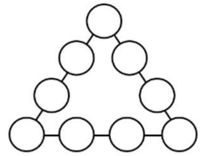
5. В вершинах пятиугольника записано по одному целому числу. Сумма любых двух чисел в вершинах, соединенных стороной, равна 57 или 58. Чему равна сумма всех чисел в вершинах?

6. В вершинах шестиугольника записано по одному целому числу. Сумма любых двух чисел в вершинах, соединенных стороной, равна 57 или 58. Чему равна сумма всех чисел в вершинах?

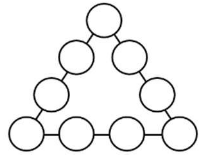
7. В мешочке лежат 4 гирьки, они выглядят одинаково, их веса — четыре последовательных целых числа. За одно взвешивание можно узнать суммарный вес любых трех гирек. За какое наименьшее количество взвешиваний можно узнать суммарный вес всех гирек?

8. Числа a, b и c таковы, что $a^2 + 169 = 30b - c$ и $b^2 + 225 = 26a + c$. Найдите c.

9. Тимофей расставил в кружочках, показанных на рисунке, натуральные числа от 1 до 9 (каждое — один раз) так, что суммы чисел по всем сторонам треугольника равны S.
   Возможно, что сумма S равна (1) $S = 16$, (2) $S = 17$, (3) $S = 20$, (4) $S = 23$, (5) $S = 24$.



10. Тимофей расставил в кружочках, показанных на рисунке, натуральные числа от 1 до 9 (каждое — один раз) так, что суммы чисел по всем сторонам треугольника равны. Сумма трёх чисел в вершинах равна V.
    Возможно, что сумма V равна (1) $V = 5$, (2) $V = 6$, (3) $V = 9$, (4) $V = 10$, (5) $V = 17$.



11. Метро города «Звёздный» состоит из 14 веток метро, которые пересекаются только в одной узловой станции. На каждой ветке, кроме узловой, еще 4 станции. На каждой станции нужно расставить бригады полиции. Имеется 12 бригад по 1 человеку, 10 бригад — по 2 человек, 9 бригад — по 3 человека, 8 бригад — по 4 человека, 7 бригад — по 5 человек, 6 бригад — по 6 человек, 5 бригад — по 7 человек. На каждой ветке метро в итоге должно быть поровну полицейских. Сколько полицейских будут дежурить на узловой станции?

12. Лиза задумала четыре (не обязательно целых) числа. Затем она записала на доске все шесть их попарных произведений. Одно из произведений стерлось, а остальные пять — 42, 63, 70, 240 и 360. Чему было равно стертое произведение?

13. Числа a, b, c — решение системы

    $$\begin{cases} a^2 + bc + 5101{,}5 = 202a, \\ b^2 + ca + 4898{,}5 = 201b, \\ c^2 + ab + 5302{,}5 = 203c. \end{cases}$$

    Найдите сумму $a + b + c$.

14. Лиза задумала 7 чисел, среди которых нет равных. Для каждой пары задуманных чисел она записала на доске их сумму. Во сколько раз сумма задуманных чисел меньше суммы чисел на доске?

15. Лиза задумала 7 чисел, среди которых нет равных. Для каждой тройки задуманных чисел она записала на доске их сумму. Во сколько раз сумма задуманных чисел меньше суммы чисел на доске?

16. В сборной России по футболу четыре тренера. Перед игрой они дают советы игрокам. Первый, второй и третий тренеры дали в 2 раза больше советов, чем четвертый. Первый, второй и четвертый тренеры дали в 4 раза больше советов, чем третий. Наконец, первый, третий и четвертый тренеры дали в 1,5 раза больше советов, чем второй. Во сколько раз второй, третий и четвертый тренеры дали больше советов, чем первый?

Блок 1. Системы уравнений

Интернет-карусель 2021–2022

Задания, указания, ответы, решения

Почти все задачи используют прием суммирования (или перемножения) данных в условии величин. При решении некоторых задач требуется умение свернуть квадрат выражения и использовать другие формулы сокращенного умножения.

К некоторым задачам (№ 1, № 3) приведены, для сравнения, арифметические решения. Задание № 16 очень похоже на задачи, решаемые системой линейных уравнений, но в ней значительно проще приведенное арифметическое решение.

1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 33 263. Площади двух из его граней равны 899 и 1 147. Чему равна площадь грани, не равной тем двум?

   Ответ: 1073.

   Замечание. Можно заметить, что 33263 = 29 · 31 · 37, 899 = 29 · 31, 1147 = 31 · 37, но в условии не сказано, что длины ребер — целые числа.

   Решение 1. Для длин x, y, z трех ребер, выходящих из одной вершины, имеем $xyz = 33263$, $xy = 899$, $zx = 1147$; надо найти значение yz. Так как выполнено $(xyz)^2 = xy \cdot yz \cdot zx$, то $yz = (xyz)^2 : xy : zx = 33263^2 : 899 : 1147 = 1073$.

   Решение 2 (арифметика). Пусть 899 — площадь нижней грани. Тогда высота параллелепипеда равна 33 263 : 899 = 37. Площадь одной из боковых граней равна 1 147, поэтому одно из ребер основания равно 1147 : 37 = 31, а другое — 899 : 31 = 29. Тогда искомая площадь равна 29 · 37 = 1073.

2. Числа a, b, c, d — решение системы.

$$\begin{cases} 2a + 3b + 4c + 5d = 21, \\ 3a + 6b + 4c + 2d = 32, \\ 5a + 3b + 3c + 4d = 45, \\ 4a + 2b + 3c + 3d = 56. \end{cases}$$

   Найдите сумму $a + b + c + d$.

   Ответ: 11.

   Решение. Заметим, что при сложении четырёх уравнений системы получаем $14(a + b + c + d) = 21 + 32 + 45 + 56 = 154$, $a + b + c + d = 154 : 14 = 11$.

3. Каждая клетка клетчатого квадрата 28 × 28 покрашена в один из трёх цветов: красный, белый или синий. Красных клеток — 250, белых — 300. Любые две соседние (по стороне) клетки разного цвета. Квадрат разрезали на прямоугольники из двух клеток. Сколько могло получиться красно-белых частей?

   Ответ: 158.

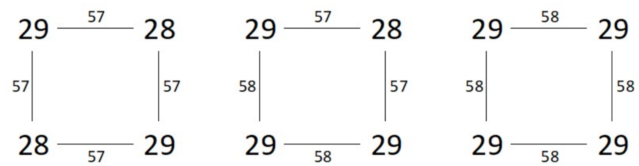
   Решение 1. Пусть x — количество красно-белых частей, y — красно-синих, z — бело-синих. Из условия $x + y = 250$, $z + x = 300$, $x + y + z = 28 \cdot 28 : 2 = 392$; надо найти $y + z$. Выполнено $2(x + y + z) = (x + y) + (y + z) + (z + x)$, получаем $x = (x + y)(z + x) - (x + y + z) = (250 + 300) - 392 = 158$.

   Решение 2 (арифметика). Синих клеток 28 · 28 – 250 – 300 = 234, поэтому 234 белых и красных клеток — в частях с синими клетками, а остальные 250 + 300 – 234 = 316 белых и красных клеток образуют 316 : 2 = 158 бело-красных частей.

4. В вершинах квадрата записано по одному целому числу. Сумма любых двух чисел в вершинах, соединенных стороной, равна 57 или 58. Чему равна сумма всех чисел в вершинах?

   Ответ: 114, 115 или 116.

   Решение. Сумма чисел на противоположных сторонах квадрата равна сумме чисел в вершинах. Поэтому, возможные значения искомой суммы 57 + 57 = 114, 57 + 58 = 115 и 58 + 58 = 116. Все они возможны, примеры показаны на рисунке.



5. В вершинах пятиугольника записано по одному целому числу. Сумма любых двух чисел в вершинах, соединенных стороной, равна 57 или 58. Чему равна сумма всех чисел в вершинах?

   Ответ: 143, 144 или 145.

   Решение. Каждое число в вершине пятиугольника входит в две суммы. Поэтому сумма чисел на сторонах чётна, так как она вдвое больше суммы чисел в вершинах.

   Значит, сумма чисел в вершинах от $(57 + 57 + 57 + 57 + 58) : 2 = 114 + 29 = 143$ до $(58 + 58 + 58 + 58 + 58) : 2 = 145$. Все три значения 143, 144 и 145 возможны. Если во всех вершинах стоят числа 29, то все суммы на сторонах равны 58, а сумма чисел в вершинах 145. Если в такой расстановке в одной вершине заменить 29 на 28, то искомая сумма 144; если в двух несоседних вершинах заменить 29 на 28, то сумма 143.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2021–2022 учебный год

6. В вершинах шестиугольника записано по одному целому числу. Сумма любых двух чисел в вершинах, соединенных стороной, равна 57 или 58. Чему равна сумма всех чисел в вершинах?

Ответ: 171, 172, 173 или 174

Решение. Рассмотрим три стороны шестиугольника, среди которых нет соседних. Сумма чисел на них равна сумме чисел в вершинах. Значит, искомая сумма не менее $57 \cdot 3 = 171$ и не более $58 \cdot 3 = 174$.

Все значения от 171 до 174 возможны. Если в вершинах поочередно стоят числа 28 и 29, то суммы на сторонах равны 57, а сумма в вершинах равна $57 \cdot 3 = 171$. Если по очереди менять числа 28 на 29, то будут получаться суммы 172, 173 и 174.

7. В мешочке лежат 4 гирьки, они выглядят одинаково, их веса — четыре последовательных целых числа. За одно взвешивание можно узнать суммарный вес любых трех гирек. За какое наименьшее количество взвешиваний можно узнать суммарный вес всех гирек?

Ответ: 2.

Решение. Пронумеруем гирьки № 1, № 2, № 3 и № 4 по возрастанию веса. Взвесим любые три гирьки.

Если сумма весов делится на 3 и равна $3m$, то на весах три последовательные гирьки: № 1, № 2, № 3 или № 2, № 3, № 4, их массы $m-1$, m и $m+1$. Вторым взвешиванием заменим любую гирьку на весах на ту, которая на весы не попала. если вес стал меньше, то добавленная гиря самая легкая (её вес $m-2$), если больше — самая тяжелая (её вес $m+2$).

Если при первом взвешивании сумма весов на 3 не делится, то на весах гирьки № 1, № 2, № 4 или № 1, № 3, № 4. Если гиря № 1 имеет массу m, то в первом случае масса равна $3m+4$, во втором — $3m+5$. Так как $3m+4$ и $3m+5$ дают разные остатки (1 и 2 соответственно), то можно понять, о каком случае идёт речь. Тогда можно найти значение m и массы гирек.

Комментарий. Задача «наоборот»: не надо взвешивать все варианты по три гири, а потом складывать.

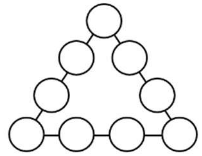
Комментарий. Ответ «2» дали 79 команд, ответ «3» — 48 команд, ответ «4» — 67 команд.

8. Числа a, b и c таковы, что $a^2 + 169 = 30b - c$ и $b^2 + 225 = 26a + c$. Найдите c.

Ответ: 112.

Решение. Сумму равенств можно привести к виду $(a-13)^2 + (b-15)^2 = 0$, откуда $a = 13$, $b = 15$. Тогда $c = 30b - a^2 - 169 = 30 \cdot 15 - 13^2 - 169 = 112$.

9. Тимофей расставил в кружочках, показанных на рисунке, натуральные числа от 1 до 9 (каждое — один раз) так, что суммы чисел по всем сторонам треугольника равны S.

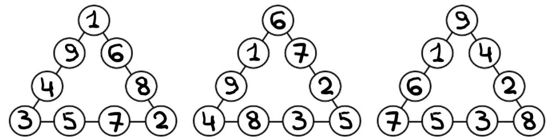


Возможно, что сумма S равна (1) $S = 16$, (2) $S = 17$, (3) $S = 20$, (4) $S = 23$, (5) $S = 24$.

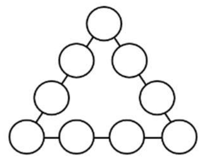
Ответ: 2, 3 и 4.

Решение. Если S — сумма на стороне треугольника, а V — сумма трёх чисел в вершинах, то выполнено соотношение $S = (1 + 2 + \ldots + 9 + V) : 3 = 15 + V/3$. Действительно, если сложить суммы на сторонах, то числа в вершинах войдут по 2 раза, а остальные числа — по одному разу.

Сумма S — целое число. Значит, V кратно трём. Минимальное возможное значение $V/3$ равно $(1 + 2 + 3) : 3 = 2$, максимальное — $(7 + 8 + 9) : 3 = 8$. Значит, S может принимать значения от $15 + 2 = 17$ до $15 + 8 = 23$. Под это условие подходят варианты (2), (3) и (4). Все три варианта возможны. Примеры показаны на рисунке ниже.



10. Тимофей расставил в кружочках, показанных на рисунке, натуральные числа от 1 до 9 (каждое — один раз) так, что суммы чисел по всем сторонам треугольника равны. Сумма трёх чисел в вершинах равна V.



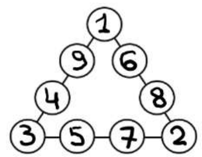
Возможно, что сумма V равна (1) $V = 5$, (2) $V = 6$, (3) $V = 9$, (4) $V = 10$, (5) $V = 17$.

Ответ: 2

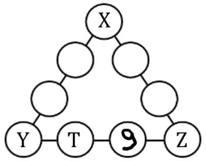
Решение. Если S — сумма на стороне треугольника, а V — сумма трёх чисел в вершинах, то выполнено соотношение $S = (1 + 2 + \ldots + 9 + V) : 3 = 15 + V/3$. Действительно, если сложить суммы на сторонах, то числа в вершинах войдут по 2 раза, а остальные числа — по одному разу.

Сумма S — целое число. Значит, V кратно трём. То есть, V принимает кратные трём значения не менее $1 + 2 + 3 = 6$ и не более $7 + 8 + 9 = 24$, то есть 6, 9, 12, 15, 18, 21 или 24. Под это условие подходят варианты (2) и (3).

Вариант (2) $V = 6$ возможен, пример показан на рисунке справа.



Вариант (3) $V = 9$ невозможен. Если $V = 9$, то $S = 18$. Число 9 не может находиться в вершине. Рассмотрим ситуацию, показанную на рисунке ниже. Должно выполняться $X + Y + Z = 9$, $9 + T + Y + Z = 18$, откуда $X = T = 9 - Y - Z$. Это противоречит условию, так как все числа в кружочках различны.



11. Метро города «Звёздный» состоит из 14 веток метро, которые пересекаются только в одной узловой станции. На каждой ветке, кроме узловой, еще 4 станции. На каждой станции нужно расставить бригады полиции. Имеется 12 бригад по 1 человеку, 10 бригад — по 2 человек, 9 бригад — по 3 человека, 8 бригад — по 4 человека, 7 бригад — по 5 человек, 6 бригад — по 6 человек, 5 бригад — по 7 человек. На каждой ветке метро в итоге должно быть поровну полицейских. Сколько полицейских будут дежурить на узловой станции?

Ответ: 1.

Решение. Всего в метро $12 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 197$ полицейских. Пусть на узловой станции дежурят x полицейских, а на каждой ветке — y полицейских. Тогда $13x + 197 = 14y$, при этом x может быть равно 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 7. Подходит только $x = 1$.

12. Лиза задумала четыре (не обязательно целых) числа. Затем она записала на доске все шесть их попарных произведений. Одно из произведений стерлось, а остальные пять — 42, 63, 70, 240 и 360. Чему было равно стертое произведение?

Ответ: 216.

Решение. Пусть задуманы числа a, b, c и d, число P — их произведение. На доске записаны пять из 6 чисел: ab, ac, ad, bc, bd, cd.

	42	63	70	240
360	15120	22680	25200	86400
240	10080	15120	16800	
70	2940	4410		
63	2646			

Заметим, что $P = ab \cdot cd = ac \cdot bd = ad \cdot bc$. В таблице справа показаны все попарные произведения данных пяти чисел. Только в одном случае произведения равны, значит, $P = 15120 = 42 \cdot 360 = 63 \cdot 240$. Стёртое число на доске — $15120 : 70 = 216$.

13. Числа a, b, c — решение системы

$$\begin{cases} a^2 + bc + 5101{,}5 = 202a, \\ b^2 + ca + 4898{,}5 = 201b, \\ c^2 + ab + 5302{,}5 = 203c. \end{cases}$$

Найдите сумму $a + b + c$.

Ответ: 151,5.

Решение. Умножим на 2 каждое из уравнений и представим систему в виде

$$\begin{cases} 2a^2 + 2bc + 10203 - 404a = 0, \\ 2b^2 + 2ca + 9797 - 402b = 0, \\ 2c^2 + 2ab + 10605 - 406c = 0. \end{cases}$$

Сложим соотношения и преобразуем:
$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 404a - 402b - 406c + 30605 = 0$,
$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 - 404a - 402b - 406c + 30605 = 0$.

Выделим в $404a + 402b + 406c$ попарные суммы переменных:
$404a + 402b + 406c = 200(a + b) + 202(b + c) + 204(c + a)$.

Заметим, что $30605 = 100^2 + 101^2 + 102^2$.

Значит, полученное равенство представимо в виде

$(a + b)^2 - 2 \cdot 100(a + b) + 100^2 +$
$+(b + c)^2 - 2 \cdot 101(b + c) + 101^2 +$
$+(c + a)^2 - 2 \cdot 102(c + a) + 102^2 = 0$

или $(a + b - 100)^2 + (b + c - 101)^2 + (c + a - 102)^2 = 0$.

Тогда

$$\begin{cases} a + b = 100, \\ b + c = 101, \\ c + a = 102, \end{cases}$$

откуда $a + b + c = (100 + 101 + 102) : 2 = 151{,}5$.

Комментарий. Данное решение неполное, так как его результат таков: если система имеет решение, то $a + b + c = 151{,}5$. Если же система не имеет решения, то сумма $a + b + c$ не имеет никакого числового значения.

Из последних соотношений следует, что

$a = 151{,}5 - 101 = 50{,}5$,
$b = 151{,}5 - 102 = 49{,}5$,
$c = 151{,}5 - 100 = 51{,}5$.

Можно убедиться, что эта тройка чисел — решение системы, данной в условии.

14. Лиза задумала 7 чисел, среди которых нет равных. Для каждой пары задуманных чисел она записала на доске их сумму. Во сколько раз сумма задуманных чисел меньше суммы чисел на доске?

Ответ: 6.

Решение. Каждое число входит в суммы 6 раз — по разу с каждым из остальных. Поэтому сумма задуманных чисел меньше суммы чисел на доске в 6 раз.

15. Лиза задумала 7 чисел, среди которых нет равных. Для каждой тройки задуманных чисел она записала на доске их сумму. Во сколько раз сумма задуманных чисел меньше суммы чисел на доске?

Ответ: 15.

Решение. Из 6 чисел можно составить $6 \cdot 5 : 2 = 15$ пар. Поэтому каждое число входит в 15 троек — по разу с каждой парой, составленной из остальных чисел. Значит, в сумму чисел на доске каждое число входит 15 раз, то есть сумма задуманных чисел меньше суммы чисел на доске в 15 раз.

16. В сборной России по футболу четыре тренера. Перед игрой они дают советы игрокам. Первый, второй и третий тренеры дали в 2 раза больше советов, чем четвертый. Первый, второй и четвертый тренеры дали в 4 раза больше советов, чем третий. Наконец, первый, третий и четвертый тренеры дали в 1,5 раза больше советов, чем второй. Во сколько раз второй, третий и четвертый тренеры дали больше советов, чем первый?

Ответ: 14

Решение. Из первого условия следует, что четвертый тренер дал 1/3 всех советов, из второго — что третий дал 1/5 всех советов, а из третьего — что второй дал 2/5 всех советов. Значит, первый тренер дал $1 - 1/3 - 1/5 - 2/5 = 1/15$ всех советов. Тогда остальные дали 14/15 всех советов, то есть в 14 раз больше.