

## Блок 1. Многочлены

### Интернет-карусель 2021–2022

#### Условия задач

1. При каком значении  $t$  многочлен  $x^5 + 2x^4 - 3x^2 + tx + 4$  делится на  $x + 1$ ?
2. В многочлен  $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 2$  вместо переменной подставили многочлен  $Q(x) = x^5 - 3x^3 + 3x^2 + 1$ . Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен  $P(Q(x))$ . Найдите сумму коэффициентов многочлена  $P(Q(x))$ .
3. Дан многочлен  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ . Затем в  $P(x)$  вместо  $x$  подставили  $P(x)$ , в полученном снова вместо  $x$  подставили  $P(x)$  и так далее, получили многочлен  $P(P(P(P(P(x))))))$ . Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен. Чему равна степень такого многочлена?
4. Дан многочлен  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ . Затем в  $P(x)$  вместо  $x$  подставили  $P(x)$ , в полученном снова вместо  $x$  подставили  $P(x)$  и так далее, получили многочлен  $P(P(P(P(P(x))))))$ . Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен. Найдите сумму коэффициентов этого многочлена.
5. Дан многочлен  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ . Затем в  $P(x)$  вместо  $x$  подставили  $P(x)$ , в полученном снова вместо  $x$  подставили  $P(x)$  и так далее, всего подставляли 2021 раз. Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен. Найдите свободный коэффициент этого многочлена.
6. Многочлен  $P(x) = (a + b)x^4 + (a - b)x^2 - 2$  делится на  $x^2 - x + 2$ . Найдите значение  $5a + 2b$ .
7. Найдите остаток от деления многочлена  $(2x)^{2021} + 5$  на многочлен  $2x + 1$ .
8. Найдите степень многочлена  $(1 - x)^{57} - (2 - x)^{57} + (3 - x)^{57} - \dots - (100 - x)^{57}$ .
9. Найдите старший коэффициент многочлена  $(1 - x)^{57} - (2 - x)^{57} + (3 - x)^{57} - \dots - (100 - x)^{57}$ .
10. Пете дали многочлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами. Он поменял некоторые коэффициенты местами и получил многочлен  $Q(x)$ . Разность  $P(2021) - Q(2021)$  оказалась натуральным числом. Какое минимальное значение может иметь эта разность?
11. Пусть  $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 8$ . Найдите хотя бы одно целое решение уравнения  $P(x) = 3050208$ .
12. Пусть  $P(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами, а число 3 — его корень. Пусть для некоторого целого  $t$  выполняется  $P(t) = 1$ . Чему может быть равно  $t$ ?

13. При каком значении  $a$  остаток от деления  $x^3 + ax + 4$  на  $x + 2$  равен 6?
14. Выражение  $(3x^4 - 5x + 4)^3 - (2x^3 + 4x^2 - 2x + 6)^2(x^3 + 8x^2 - 4x - 5)$  преобразовали и привели к стандартному виду многочлена. Найдите сумму его коэффициентов.
15. Выражение  $(3x^4 - 5x + 4)^3 - (2x^3 + 4x^2 - 2x + 6)^2(x^3 + 8x^2 - 4x - 5)$  преобразовали и привели к стандартному виду многочлена. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях.
16. Пусть  $P(x) = x^{12} - 2021x + 3$ . Найдите свободный член многочлена  $P(x + 2)$ .