

Блок 9. Комбинаторика и вероятность

Подготовительное занятие

- Кидают игральный кубик. Какова вероятность, что выпадет (а) 5 очков, (б) чётное число очков, (в) число, не превосходящее четырёх?
 - Когда подбрасывают монету, с равной вероятностью выпадает орёл или решка. Петя много раз подбрасывает монету. Какова вероятность того, что он получит орла не более чем за 3 подбрасывания?
1. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность (а) выпадения дубля (двух одинаковых чисел); (б) того, что хотя бы одно из выпавших чисел равно 3; (в) того, что оба выпавших числа меньше 3?
 2. Монету подбрасывают 4 раза. Какова вероятность выпадения (а) четырёх орлов; (б) трёх решек и одного орла (в каком-то порядке), (в) двух орлов подряд?
 3. На экзамене есть 25 вопросов, случайно выбираются два из них. Какова вероятность (а) получить вопросы № 1 и № 2; (б) получить вопрос № 3; (в) не получить вопрос № 25?
 4. В классе присутствуют 13 учеников. Учительница по очереди вызывает к доске всех в случайном порядке. Найдите вероятность того, что Миша выйдет к доске раньше, чем Максим.
 5. В показательных выступлениях по фигурному катанию выступают 4 девушки и 5 юношей. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что (а) первая выступает девушка, (б) первые две выступают девушки.
 6. На полке стоят 10 книг. Среди них есть трёхтомник про Гарри Поттера. Какова вероятность того, что эти три тома стоят в правильном порядке (не обязательно рядом)?
 7. (а) Если бросить 2 кубика, то сумма очков на них может быть от 2 до 12 — всего 11 значений. Петя и Вася играют в игру. Петя выбирает 5 значений сумм, а Васе достаются остальные 6 сумм. Далее они бросают кубики. Если выпадает сумма Пети, то Вася даёт Пете рубль. Если выпадает сумма Васи, то Петя даёт Васе рубль. Кто больше зарабатывает в такой игре?
(б) А если Петя выбирает только 4 значения, а Васе достаются остальные?

Блок 9. Комбинаторика и вероятность

Подготовительное занятие

- Кидают игральный кубик. Какова вероятность, что выпадет (а) 5 очков, (б) чётное число очков, (в) число, не превосходящее четырёх?
 - Когда подбрасывают монету, с равной вероятностью выпадает орёл или решка. Петя много раз подбрасывает монету. Какова вероятность того, что он получит орла не более чем за 3 подбрасывания?
1. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность (а) выпадения дубля (двух одинаковых чисел); (б) того, что хотя бы одно из выпавших чисел равно 3; (в) того, что оба выпавших числа меньше 3?
 2. Монету подбрасывают 4 раза. Какова вероятность выпадения (а) четырёх орлов; (б) трёх решек и одного орла (в каком-то порядке), (в) двух орлов подряд?
 3. На экзамене есть 25 вопросов, случайно выбираются два из них. Какова вероятность (а) получить вопросы № 1 и № 2; (б) получить вопрос № 3; (в) не получить вопрос № 25?
 4. В классе присутствуют 13 учеников. Учительница по очереди вызывает к доске всех в случайном порядке. Найдите вероятность того, что Миша выйдет к доске раньше, чем Максим.
 5. В показательных выступлениях по фигурному катанию выступают 4 девушки и 5 юношей. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что (а) первая выступает девушка, (б) первые две выступают девушки.
 6. На полке стоят 10 книг. Среди них есть трёхтомник про Гарри Поттера. Какова вероятность того, что эти три тома стоят в правильном порядке (не обязательно рядом)?
 7. (а) Если бросить 2 кубика, то сумма очков на них может быть от 2 до 12 — всего 11 значений. Петя и Вася играют в игру. Петя выбирает 5 значений сумм, а Васе достаются остальные 6 сумм. Далее они бросают кубики. Если выпадает сумма Пети, то Вася даёт Пете рубль. Если выпадает сумма Васи, то Петя даёт Васе рубль. Кто больше зарабатывает в такой игре?
(б) А если Петя выбирает только 4 значения, а Васе достаются остальные?

Блок 9. Комбинаторика и вероятность

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Занятие посвящено начальным представлениям о вероятности, комбинаторным подсчётам числа исходов. При обсуждении первой задачи предлагается ввести основные понятия и использовать их в дальнейших рассуждениях.

В процессе решения задач полезно обсудить комментарий к решению задачи № 5.

- Кидают игральный кубик. Какова вероятность, что выпадет (а) 5 очков, (б) чётное число очков, (в) число, не превосходящее четырёх?

Ответ: (а) $1/6$, (б) $0,5$, (в) $2/3$.

Решение. Всего есть 6 вариантов выпадения очков: 1, 2, 3, 4, 5 или 6. В пункте (а) подойдёт 1 вариант, в пункте (б) — 3 варианта (2, 4 и 6), в пункте (в) — 4 варианта (1, 2, 3 и 4). Значит, искомая вероятность равна (а) $1/6$, (б) $3/6 = 0,5$, (в) $4/6 = 2/3$.

Основные понятия. Здесь, все возможные варианты (количество очков на кубике) называют *элементарными исходами*. Подразумевается, что все они выпадают с равной вероятностью. В каждом пункте описаны *благоприятные исходы*: в пункте (а) — число 5, в пункте (б) — четное число, в пункте (в) число, не превосходящее 4. *Вероятностью* считаем отношение числа благоприятных исходов к общему числу элементарных исходов. Понятно, что вероятность любого события не меньше 0 и не больше 1.

- Когда подбрасывают монету, с равной вероятностью выпадает орёл или решка. Петя много раз подбрасывает монету. Какова вероятность того, что он получит орла не более чем за 3 подбрасывания?

Ответ: $7/8$.

Решение. Всего $2^3 = 8$ возможных выпадения монеты за 3 броска. Неблагоприятный исход (3 решки) только один, значит, благоприятных исходов — 7. Искомая вероятность равна $7/8$.

1. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность (а) выпадения дубля (двух одинаковых чисел); (б) того, что хотя бы одно из выпавших чисел равно 3; (в) того, что оба выпавших числа меньше 3?

Ответ: (а) $1/6$, (б) $11/36$, (в) $1/9$.

Решение. Здесь *элементарные исходы* — пары очков от (1; 1) до (6; 6), их общее число — $6 \cdot 6 = 36$.

(а) Всего 6 *благоприятных* исходов: (1; 1), (2; 2), ..., (6; 6). Искомая вероятность равна $6/36 = 1/6$.

(б) Всего 11 *благоприятных* исходов. Действительно, 6 исходов, когда 3 очка выпало на первом кубике. Еще 6 исходов, когда 3 очка выпало на втором кубике. При этом вариант, когда 3 очка выпало на обоих кубиках, учтён дважды. Всего $6 + 6 - 1 = 11$. Искомая вероятность равна $11/36$.

(в) Здесь всего 4 *благоприятных* исхода: (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2). Отсюда вероятность равна $4/36 = 1/9$.

2. Монету подбрасывают 4 раза. Какова вероятность выпадения (а) четырёх орлов; (б) трёх решек и одного орла (в каком-то порядке), (в) двух орлов подряд?

Ответ: (а) $1/16$, (б) $0,25$, (в) $0,5$.

Решение. Всего $2^4 = 16$ элементарных исходов.

(а) Здесь один *благоприятный* исход, поэтому вероятность равна $1/16$.

(б) Здесь 4 *благоприятных* исхода: ОРРР, РОРР, РРОР, РРОО, поэтому вероятность равна $4/16 = 0,25$.

(в) Выпишем все *благоприятные* исходы. Если выпали 4 орла, то это один подходящий вариант ОООО. Если 3 орла, то 4 варианта: РООО, ОРОО, ООРО, ОООР. Если только 2 орла (и они подряд), то 3 варианта: ООРР, РООР, РРОО. Итого 8 *благоприятных* исходов. Вероятность равна $8/16 = 0,5$.

3. На экзамене есть 25 вопросов, случайно выбираются два из них. Какова вероятность (а) получить вопросы № 1 и № 2; (б) получить вопрос № 3; (в) не получить вопрос № 25?

Ответ: (а) $1/300$, (б) $2/25$, (в) $23/25$.

Решение. Будем считать, что вытягивается сначала один вопрос, затем — второй. Всего элементарных событий $25 \cdot 24 = 600$.

(а) Всего 2 *благоприятных* исхода: сначала выбрали № 1 и затем № 2, сначала выбрали № 2, а затем № 1. Вероятность равна $2/600 = 1/300$.

(б) Исходов, где № 3 на первом месте — 24, где № 3 на втором месте — тоже 24. Одновременно быть на 1 и 2 месте вопрос № 3 не может. Вероятность равна $48/600 = 2/25$.

(в) Исходов, где не будет вопроса № 25 — $24 \cdot 23$. Вероятность равна $(23 \cdot 24) : (25 \cdot 24) = 23/25$.

Комментарий. Заметьте, при предположении, что некоторый аппарат выдает сразу два номера, получается вдвое меньше элементарных событий, так как, например, набор вопросов № 1 и № 2 будет совпадать с набором № 2 и № 1.

При этом, не трудно проверить, вдвое уменьшится число благоприятных исходов, а вероятность останется той же.

4. В классе присутствуют 13 учеников. Учительница по очереди вызывает к доске всех в случайном порядке. Найдите вероятность того, что Миша выйдет к доске раньше, чем Максим.

Ответ: 0,5.

Решение. Все элементарные исходы (порядок в очереди из учеников) можно разбить на пары: любой последовательности, где Миша выходит раньше Максима, можно сопоставить такую, где только Миша и Максим поменялись местами. Значит, благоприятных исходов ровно половина от всех элементарных исходов. Откуда искомая вероятность равна $1/2$.

5. В показательных выступлениях по фигурному катанию выступают 4 девушки и 5 юношей. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что (а) первая выступает девушка, (б) первые две выступают девушки.

Ответ: (а) $4/9$, (б) $1/6$.

Решение. Всего $9!$ элементарных событий — возможных порядков выступлений.

(а) Заметим, если мы знаем первого выступающего, то есть $8!$ порядков выступлений остальных участников. Значит, будет $4 \cdot 8!$ порядков, начинающихся с девушки. Вероятность равна $4 \cdot 8! : 9! = 4/9$.

(б) Выбрать девушку на первую позицию можно 4 способами, после этого на вторую позицию — 3 способами. Далее остальных можно поставить $7!$ способами. Значит, вероятность равна $4 \cdot 3 \cdot 7! : 9! = 1/6$.

Комментарий. В пункте (а) возможны следующие рассуждения: первым может стоять любой из 9 человек, нам подходят 4 из этих вариантов, поэтому вероятность $4/9$. Здесь одно элементарное событие включает в себя $8!$ событий из решения выше. Так как их поровну, то «новые» элементарные события равновероятны. От этого получается такой же ответ.

В пункте (а) можно рассуждать так: «первым стоит девушка или юноша, значит, вероятность $1/2$ ». Здесь неверный ответ от того, что «новые» элементарные события не равновероятны с точки зрения приведенного решения.

6. На полке стоят 10 книг. Среди них есть трёхтомник про Гарри Поттера. Какова вероятность того, что эти три тома стоят в правильном порядке (не обязательно рядом)?

Ответ: $1/6$.

Решение. Сгруппируем все возможные порядки книг в группы по такому правилу: в одной группе будут такие расположения, где все книги, кроме указанных трёх, стоят на одинаковых местах. В каждой группе будет 6 расстановок: в них тома про Поттера стоят в порядках 123, 132, 213, 231, 312, 321. В каждой группе подойдёт только один порядок, значит, благоприятные исходы составляют $1/6$ часть всех исходов. Искомая вероятность — $1/6$.

7. (а) Если бросить 2 кубика, то сумма очков на них может быть от 2 до 12 — всего 11 значений. Петя и Вася играют в игру. Петя выбирает 5 значений сумм, а Васе достаются остальные 6 сумм. Далее они бросают кубики. Если выпадает сумма Пети, то Вася даёт Пете рубль. Если выпадает сумма Васи, то Петя даёт Васе рубль. Кто больше заработает в такой игре?

- (б) А если Петя выбирает только 4 значения, а Васе достаются остальные?

Ответ: Петя (несмотря на то, что значений сумм у него меньше).

Решение. Всего 36 возможных элементарных исходов. Не сложно проверить, что верны данные следующей таблицы (проверьте это):

сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
вариантов	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Если Петя заберет себе значения сумм 5, 6, 7, 8 и 9, то благоприятных для него исходов будет $4 + 5 + 6 + 5 + 4 = 24$. Вероятность его выигрыша $24/36 = 2/3$. При долгой игре он явно будет в выигрыше.

Если Петя заберет себе значения сумм 6, 7, 8 и 9, то благоприятных для него исходов будет $5 + 6 + 5 + 4 = 20$. Вероятность его выигрыша $20/36 = 5/9$, что также более $1/2$. При долгой игре он также будет в выигрыше.