Блок 8. Остатки и уравнения в целых числах

Интернет-карусель (2020–2021). Задания

1. Какой остаток при делении на 5 даёт число 2^{2021}?
2. Сколько таких пар натуральных чисел a и b, что $5a + 7b = 2021$?
3. Сколько пар натуральных чисел a и b, что $57a + 171b = 2021$?
4. Чебурашка пришёл в магазин с желанием купить один апельсин. Апельсин стоит 57 рублей. У Чебурашки есть только монеты по 7 рублей, а у кассира для сдачи только монеты по 17 рублей. Какое наименьшее число монет может дать Чебурашка, чтобы получить сдачу полностью?
5. Чебурашка купил несколько маленьких мандаринов по 8 рублей, средних мандаринов по 9 рублей и больших мандаринов по 10 рублей. Всего — более 11 штук. Потратил ровно 100 рублей. Сколько мандаринов купил Чебурашка?
6. В ряд выписано 2021 число. Первые два — 3 и 4, а каждое следующее, начиная с третьего, равно сумме всех предыдущих. Какой остаток при делении на 13 даёт последнее число ряда?
7. В ряд выписано 2021 число. Первые два — 3 и 4, а каждое следующее, начиная с третьего, равно сумме всех предыдущих. Сколько чисел, кратных 7, в этом ряду?
8. Садовод Миша сварил 17 литров компота. Он разлил весь компот в банки емкостью в 0,5 и 0,7 литров (оба вида были использованы). Все банки были полными. Сколько всего банок могло быть использовано?
9. Первая и последняя цифры натурального числа — единицы, остальные 2021 цифр — нули. Какой остаток даёт это число при делении на 19?
10. После турнира школьников и их учителей привезли на вокзал на 5 автобусах. Во всех автобусах было поровну пассажиров, каждый автобус вмещает не более 50 человек. В 4 таких автобуса эти участники не помещались. Когда они прибыли на вокзал, 7 человек остались, а остальные разместились поровну в 13 вагонах. Сколько пассажиров было в каждом автобусе?
11. Натуральные числа a и b таковы, что $5a + 7b = 2021$. Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b$?
12. Натуральные числа a и b таковы, что $43a + 47b$ кратно 2021. Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b$?
13. Чебурашке в магазине 15-рублёвую купюру разменяли n купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей. Чему может быть равно n?

14. Найдите натуральное число n, при котором сумма всех натуральных чисел от 1 до n в 2021 раз больше самого числа n.
15. Сумма трёх простых чисел в 7 раз меньше их произведения. Чему равна эта сумма?
16. Гена и Чебурашка купили вместе 80 фруктов, причём 5/9 покупки Чебурашки — апельсины, а 7/11 покупки Гены — мандарины. Сколько фруктов купил Гена?

Блок 8. Остатки и уравнения в целых числах

Интернет-карусель (2020–2021). Задания, ответы, решения

- В решениях некоторых задач использованы формулы корней линейных уравнений в целых числах. Пусть даны целые числа a, b, c, НОД$(a; b) = 1$. Все такие пары целых чисел $(x; y)$, что выполнено $ax + by = c$, имеют вид $(x^* + bt, y^* - at)$, где (x^*, y^*) — какая-то подходящая пара корней, t — произвольное целое число.

1. Какой остаток при делении на 5 даёт число 2^{2021}?

   Ответ: 2

   Решение. Если два числа m и n дают одинаковые остатки при делении на 5, то $m - n$ кратно 5. Тогда $2m - 2n = 2(m - n)$ также кратно 5, то есть числа $2m$ и $2n$ дают одинаковые остатки при делении на 5.

   Значит, остатки, которые дают степени числа 2 при делении на 5, зацикливаются. Числа $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ дают остатки 2, 4, 3, 1, 2, цикл имеет длину 4 и состоит из остатков (2, 4, 3, 1). Так как 2021 = 505 · 4 + 1, то остаток 2021-ой степени — первый в указанном цикле, он равен 2.

2. Сколько таких пар натуральных чисел a и b, что $5a + 7b = 2021$?

   Ответ: 58.

   Решение. Одна из подходящих пар — $a = 400, b = 3$. Значит, любая пара имеет вид $(400 - 7t; 3 + 5t)$, t — произвольное целое число. Должно быть выполнено $400 - 7t > 0$ и $3 + 5t > 0$, откуда $0 \le t \le 57$. Подходит 58 значений t, значит, подойдёт ровно 58 пар.

3. Сколько пар натуральных чисел a и b, что $57a + 171b = 2021$?

   Ответ: 0.

   Решение. Числа 57 и 171 кратны 57, а число 2021 — нет. Поэтому, левая часть равенства $57a + 171b = 2021$ кратна 57, правая — нет. Подходящие числа a и b не существуют.

4. Чебурашка пришёл в магазин с желанием купить один апельсин. Апельсин стоит 57 рублей. У Чебурашки есть только монеты по 7 рублей, а у кассира для сдачи только монеты по 17 рублей. Какое наименьшее число монет может дать Чебурашка, чтобы получить сдачу полностью?

   Ответ: 13.

   Решение. Надо найти наименьшее n, при котором $7n - 57$ кратно 17. Заметим, 17 + 57 не кратно 7, 2 · 17 + 57 = 91 кратно 7. Значит, наименьшее число монет, которое должен дать Чебурашка, равно 91 : 7 = 13 монет.

5. Чебурашка купил несколько маленьких мандаринов по 8 рублей, средних мандаринов по 9 рублей и больших мандаринов по 10 рублей. Всего — более 11 штук. Потратил ровно 100 рублей. Сколько мандаринов купил Чебурашка?

   Ответ: 12.

   Решение. Надо найти $a + b + c$, где положительные числа a, b, c удовлетворяют условиям $8a + 9b + 10c = 100$, $a + b + c > 11$. Тогда $8a + 9b = 100 - 10c$, сумма $8a + 9b$ кратна 10, то есть равно 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 или 90.

   Разберем эти варианты.
   (1) Сумма $8a + 9b$ не может быть равна 10, 20, 30, 40.
   (2) Если $8a + 9b = 50 = 32 + 18$, то $a = 4, b = 2$, с $= 5$, сумма не более 11.
   (3) Если $8a + 9b = 60 = 24 + 36$, то $a = 3, b = 4, c = 4$, сумма не более 11.
   (4) Если $8a + 9b = 70 = 16 + 54$, то $a = 2, b = 6, c = 3$, сумма не более 11.
   (5) Если $8a + 9b = 80 = 72 + 18$, то $a = 9, b = 2, c = 1$, сумма равна 12 > 11.
   (6) Если $8a + 9b = 90 = 8 + 72$, то $a = 1, b = 8, c = 1$, сумма не более 11.

6. В ряд выписано 2021 число. Первые два — 3 и 4, а каждое следующее, начиная с третьего, равно сумме всех предыдущих. Какой остаток при делении на 13 даёт последнее число ряда?

   Ответ: 2.

   Решение. Можно следить только за остатками чисел ряда при делении на 13. Выпишем остатки первых чисел ряда: 3, 4, 7, 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10. Здесь сумма остатков с 3-го по 14-ый делится на 13. Поэтому далее ряд начнёт повторяться: следующий остаток 7, затем — 1 и так далее.

   Вывод: есть два первых числа, а далее остатки периодичны. Длина периода — 12. Так как 2021 : 12 = 168 (ост. 5), то искомый остаток — третий в цикле, то есть равен 2.

7. В ряд выписано 2021 число. Первые два — 3 и 4, а каждое следующее, начиная с третьего, равно сумме всех предыдущих. Сколько чисел, кратных 7, в этом ряду?

   Ответ: 2019.

   Решение. Нетрудно заметить, что все числа ряда, начиная с 3-го, делятся на 7. Всего таких чисел 2021 – 2 = 2019.

8. Садовод Миша сварил 17 литров компота. Он разлил весь компот в банки емкостью в 0,5 и 0,7 литров (оба вида были использованы). Все банки были полными. Сколько всего банок могло быть использовано?

Ответ: 26, 28, 30 или 32.

Решение. Пусть было a малых банок и b больших банок. Тогда 0,5a + 0,7b = 17 или 5a + 7b = 170. Из соотношения следует, что 7b кратно 5, то есть b кратно 5. Перебором можно найти все подходящие пары: (34; 0), (27; 5), (20; 10), (13; 15), (6; 20). Первый вариант не подходит, в остальных использовано 26, 28, 30, 32 банки.

9. Первая и последняя цифры натурального числа — единицы, остальные 2021 цифр — нули. Какой остаток даёт это число при делении на 19?

Ответ: 12.

Решение. Рассмотрим ряд 101, 1001, 10001, ... В нём за числом n стоит число $10(n-1)+1=10n-9$. Остатки чисел при делении на 19 можно считать по такой же формуле: первое число даёт остаток 6, тогда 1001 даёт такой же остаток как 10 · 6 – 9 = 51, то есть 13. Получаем ряд остатков: 6, 13, 7, 4, 12, 16, 18, 0, 10, 15, 8, 14, 17, 9, 5, 3, 2, 11, далее остатки повторяются, начиная с 6. То есть остатки периодичны с периодом 18. Так как 2021 = 112 · 18 + 5, то искомое число даёт пятый остаток периода, то есть 12.

10. После турнира школьников и их учителей привезли на вокзал на 5 автобусах. Во всех автобусах было поровну пассажиров, каждый автобус вмещает не более 50 человек. В 4 таких автобуса эти участники не помещались. Когда они прибыли на вокзал, 7 человек остались, а остальные разместились поровну в 13 вагонах. Сколько пассажиров было в каждом автобусе?

Ответ: 43.

Решение. Пусть в каждом автобусе ехали $n \le 50$ человек. Если участники не поместились в 4 автобуса, то $5n > 50 \cdot 4$, откуда $n > 40$. Из условия $5n - 7$ кратно 13, можно проверить, что из чисел от 41 до 50 подходит только $n = 43$.

11. Натуральные числа a и b таковы, что $5a + 7b = 2021$. Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b$?

Ответ: 289.

Решение. Все пары целых чисел описываются как $a = 400 - 7t, b = 3 + 5t$, где t — любое целое число. Здесь должно выполняться $400 - 7t \ge 0$ и $3 + 5t \ge 0$, откуда $0 \le t \le 57$. Тогда $a + b = 403 - 2t$, минимальное значение суммы будет при $t = 57$: $a + b = 403 - 114 = 289$.

12. Натуральные числа a и b таковы, что $43a + 47b$ кратно 2021. Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b$?

Ответ: 90.

Решение. Заметим, что 2021 = 43 · 47.

Если $43a + 47b$ кратно 2021, то $43a + 47b$ кратно 43, откуда $47b$ кратно 43 и b кратно 43. Вывод: $b \ge 43$.

Если $43a + 47b$ кратно 2021, то $43a + 47b$ кратно 47, откуда $43a$ кратно 47 и a кратно 47. Вывод: $a \ge 47$.

Заметим, что $a = 47, b = 43$ подходит под условие, значит наименьшее значение $a + b$ равно 43 + 47 = 90.

13. Чебурашке в магазине 15-рублёвую купюру разменяли n купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей. Чему может быть равно n?

Ответ: 5, 7, 9.

Решение. Все достоинства купюр нечётные. Если сумма нечётна, то и количество купюр нечётно.

Число n минимально, когда меньшим числом купюр набрали 15 – (1 + 3 + 5) = 6 рублей. Значит, купюр не менее 3 + 2 = 5 штук.

Число n максимально, когда большим числом купюр набрали 15 – (1 + 3 + 5) = 6 рублей. Значит, купюр не менее 3 + 6 = 9 штук.

Осталось проверить, что 15 рублей можно набрать 5, 7 или 9 купюрами:
5 штук — 15 = 1 + 3 + 3 + 3 + 5,
7 штук — 15 = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 5,
9 штук — 15 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 5.

Комментарий. Если считать, что наличие купюр всех трёх достоинств необязательно, то возможно 3, 5, 7, 9, 11, 13 или 15 купюр.

14. Найдите натуральное число n, при котором сумма всех натуральных чисел от 1 до n в 2021 раз больше самого числа n.

Ответ: 4041.

Решение. Числа от 1 до $n - 1$, можно разбить на пары с суммой n: 1 и $n - 1$, 2 и $n - 2$ и так далее. Общая сумма кратна n, поэтому все числа должны разбиться на пары, то есть n нечётно, а сумма равна $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2 = 2021n$, откуда $n + 1 = 2021 \cdot 2, n = 4041$.

15. Сумма трёх простых чисел в 7 раз меньше их произведения. Чему равна эта сумма?

Ответ: 15.

Указания: подходят только {3, 5, 7}.

Решение. Пусть p, q, r — простые числа, $pqr = 7(p + q + r)$. Правая часть кратна 7, значит, одно из чисел равно 7. Все числа равноправны, поэтому можно считать, что $r = 7$. Получаем $p + q + 7 = pq$ или $(p - 1)(q - 1) = 8$. Здесь ни один из множителей не может равняться 8, поэтому $p - 1 = 2$, $q - 1 = 4$, $p = 3$, $q = 5$.

16. Гена и Чебурашка купили вместе 80 фруктов, причём 5/9 покупки Чебурашки — апельсины, а 7/11 покупки Гены — мандарины. Сколько фруктов купил Гена?

Ответ: 44.

Решение. Если говорится про 5/9 покупки Чебурашки, то число купленных им апельсинов кратно 9. Аналогично, Гена купил число мандаринов, кратное 11. Пусть Чебурашка купил $9a$ штук, Гена — $11b$ штук, где a и b — натуральные числа. Из условия следует, что $80 = 9a + 11b$. Отсюда следует, что $2b - 8 = 2(b - 4)$ делится на 9. Поскольку $b < 8$, то $b = 4$. Это значит, что Гена купил $11b = 44$ мандарина.