Блок 9. Алгебра: преобразования (ФСУ)

Интернет-карусель (2020–2021)

1. Вася перемножил многочлены $(11x^{10} + 10x^9 + \dots + 2x + 1)(x^{10} + x^9 + \dots + x + 1)$ и привел подобные слагаемые. Какой получился коэффициент при x^{15}?

2. Найдите $a + b + c + d$, если $2a + c = 2b + d + 97$, $a + 5b + 2c + 4d = 2021$.

3. Для какого наименьшего целого n найдутся целые числа x, y, чтобы было выполнено $x^2 + y^2 + 2021 = 2xy + 3n$?

4. Целое число n таково, что найдутся два двузначных (натуральных) числа x, y, что выполнено $x^2 + y^2 + 2x = 2xy + 2y + (2019 + n)$. Каково наибольшее значение n?

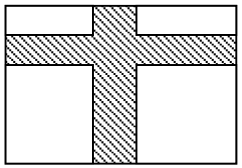
5. Сколько целых чисел n, при которых найдутся два двузначных (натуральных) числа x, y, что выполнено $x^2 + y^2 + 2x = 2xy + 2y + (2019 + n)$?

6. Найдите $2x + 3y$, если $x^2 + y^2 + 3y = 13x - 44{,}5$.

7. Числа a, b таковы, что $a + b = 13, a^2 + b^2 = 125$. Найти $a^3 + b^3$.

8. Сколькими способами можно отметить две клетки 1×1 на поверхности куба $3 \times 3 \times 3$, у которых ровно одна общая вершина?

9. Из прямоугольника периметра 100 см вырезали крест (см. рисунок), где вертикальная полоска шириной 5 см, а горизонтальная — шириной 3 см. Площадь креста равна 209 кв. см. Сколько кв. см составляет площадь всего прямоугольника?



10. Найдите сумму $x + y$, если $x^2 + 2xy = 25 - y^2$.

11. Числа 1, 2, 3, …, 25 расставляют в таблицу 5 × 5 так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наибольшее значение может иметь сумма чисел в третьем столбце?

12. Найдите значение выражения:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{625}\right).$$

13. Сколькими способами можно отметить две клетки 1×1 на поверхности куба $3 \times 3 \times 3$, у которых ровно одна общая сторона?

14. Неравные друг другу числа x и y таковы, что $x^2 - 2021x = y^2 - 2021y$. Чему может быть равна сумма $x + y$?

15. На доске написано четырёхзначное число. Три пятиклассника про него сказали учителю по одной фразе. Вася сказал: «В числе есть цифра 2», Петя: «В числе есть цифра 3», Коля: «В числе есть цифра 4». Какое наименьшее число могло быть написано, если известно, что какие-то два ученика сказали правду, а третий — неправду?

Блок 9. Алгебра: преобразования (ФСУ)

Интернет-карусель (2020–2021)

Задания интернет-карусели традиционно не упорядочены по сложности. При разборе задач можно выбирать иной порядок, например, по методам, используемых при решении.

Задания 8, 11, 13, 15 на другие темы.

1. Вася перемножил многочлены $(11x^{10}+10x^9+\dots+2x+1)(x^{10}+x^9+\dots+x+1)$ и привел подобные слагаемые. Какой получился коэффициент при x^{15}?

   Ответ: 51.

   Решение. Одночлен x^{15} получается при умножении x^{10} на x^5, x^9 на x^6, …, x^5 на x^{10}. Коэффициенты при этих произведениях равны 11, 10, …, 6. Остаётся вычислить сумму $11+10+9+8+7+6=51$.

2. Найдите $a+b+c+d$, если $2a+c=2b+d+97$, $a+5b+2c+4d=2021$.

   Ответ: 706.

   Решение. Из условия $2a-2b+c-d=97$. Тогда сложим два выражения: $(2a-2b+c-d)+(a+5b+2c+4d)=3(a+b+c+d)=97+2021=2118$, откуда $a+b+c+d=706$.

3. Для какого наименьшего целого n найдутся целые числа x, y, чтобы было выполнено $x^2+y^2+2021=2xy+3n$?

   Ответ: 674.

   Решение. Приведем данное соотношение к виду $(x-y)^2=3n-2021$. Отсюда $3n \geq 2021$. Минимальное n, при котором это возможно, равно 2022 : 3 = 674. При этом $(x-y)^2=1$, что выполнено, например, при $x=2, y=1$.

4. Целое число n таково, что найдутся два двузначных (натуральных) числа x, y, что выполнено $x^2+y^2+2x=2xy+2y+(2019+n)$. Каково наибольшее значение n?

   Ответ: 6080.

   Решение. Приведем данное соотношение $x^2+y^2+2x=2xy+2y+(2019+n)$ к виду $(x-y+1)^2=2020+n$. Если числа x, y — двузначные, то
   $2020+n \leq (99-10+1)^2=90^2=8100$, $n \leq 8100-2020=6080$.
   При $n=6080$ подойдут $x=99, y=10$.

5. Сколько целых чисел n, при которых найдутся два двузначных (натуральных) числа x, y, что выполнено $x^2+y^2+2x=2xy+2y+(2019+n)$?

   Ответ: 91.

   Решение. Приведем данное соотношение $x^2+y^2+2x=2xy+2y+(2019+n)$ к виду $(x-y+1)^2=2020+n$. Заметим, что $0 \leq x-y+1 \leq 99-10+1=90$. Значит, $2020+n$ — квадрат целого числа от 0^2 до 90^2 — это 91 значение. Нетрудно понять, что при всех этих значениях найдутся подходящие натуральные числа x, y.

6. Найдите $2x+3y$, если $x^2+y^2+3y=13x-44{,}5$.

   Ответ: 8,5.

   Решение. Приведем данное соотношение к виду $(x+y-5)^2+(x-y-8)^2=0$. Отсюда следует, что $x+y-5=x-y-8=0$.

   Сложив $x+y=5$ и $x-y=8$ получаем $2x=13, x=6{,}5$; вычитая из первого второе получаем $2y=-3, y=-1{,}5$. Тогда $2x+3y=13-4{,}5=8{,}5$.

7. Числа a, b таковы, что $a+b=13, a^2+b^2=125$. Найти a^3+b^3.

   Ответ: 1339.

   Решение. Найдём произведение ab: $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=44, ab=22$. Тогда получаем $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=13\cdot(125-22)=1339$.

8. Сколькими способами можно отметить две клетки 1×1 на поверхности куба $3\times 3\times 3$, у которых ровно одна общая вершина?

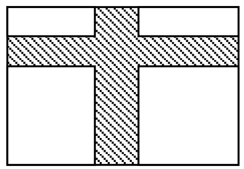
   Ответ: 96.

   Решение 1. Каждый узел, в котором сходятся углы клеток, кроме вершин куба, соответствует двум указанным в условии парам, в которых этот узел — общий для клеток. Вершины куба не являются общей вершиной ни в одной из пар. Значит, количество пар — удвоенное число таких узлов. Внутри каждой грани — 4 узла, на каждом ребре — 2 узла. Всего 2 · (4 · 6 + 12 · 2) = 2 · 48 = 96.

   Решение 2. Запишем в каждую клетку, в скольких парах она участвует. Каждая грань будет выглядеть, как показано на рисунке справа. Сумма всех чисел равна (3 · 4 + 4 · 5) · 6 = 192. Каждая пара учтена дважды, поэтому всего 192 : 2 = 96 пар.

3	4	3
4	4	4
3	4	3

9. Из прямоугольника периметра 100 см вырезали крест (см. рисунок), где вертикальная полоска шириной 5 см, а горизонтальная — шириной 3 см. Площадь креста равна 209 кв. см. Сколько кв. см составляет площадь всего прямоугольника?



   Ответ: 481

Указание: прямоугольник имеет размеры 13 см × 37 см.

Решение. Если вертикальная сторона квадрата — x см, то горизонтальная сторона — $(50 - x)$ см. Площадь вертикальной полосы — $5x$ кв. см, горизонтальной полосы — $3 \cdot (50 - x)$ кв. см. Площадь креста — сумма площадей полос, уменьшенная на площадь их пересечения (3 · 5 кв. см). Значит, $5x + 3(50 - x) - 15 = 209$, откуда $x = 37$. Получаем, что длина одной стороны — 37 см, второй стороны — (50 – 37) = 13 см. Площадь равна 37 · 13 = 481 кв. см.

10. Найдите сумму $x + y$, если $x^2 + 2xy = 25 - y^2$.

Ответ: −5, 5

Решение. Приведем данное соотношение к виду $(x + y)^2 = 25$, откуда $x + y = -5$ или $x + y = 5$.

11. Числа 1, 2, 3, …, 25 расставляют в таблицу 5 × 5 так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наибольшее значение может иметь сумма чисел в третьем столбце?

Ответ: 85.

Указание: 23 + 20 + 17 + 14 + 11 = 85.

Решение. Переставим строки так, чтобы в 3 столбце числа шли по убыванию.

(1) Верхнее число третьего столбца не более 25 – 2 = 23, так как справа от него 2 числа, которые его больше.

(2) Число третьего столбца на второй строке не более 25 – 2 – 3 = 20, так как справа от него 2 числа, которые его больше, и 3 числа верхней строки также больше его (о них шла речь в пункте (1)).

(3) Аналогично, следующее число третьего столбца не более 20 – 3 = 17, далее — не более 17 – 3 = 14, нижнее — не более 14 – 3 = 11.

Итого сумма в третьем столбце не более 23 + 20 + 17 + 14 + 11 = 85. Сумма 85 бывает. Пример показан ниже.

1	2	23	24	25
3	4	20	21	22
5	6	17	18	19
7	8	14	15	16
9	10	11	12	13

12. Найдите значение выражения:

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2020-2021 учебный год

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{625}\right).$$

Ответ: 0,52.

Решение. Преобразуем:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{625}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{25^2}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1+\frac{1}{25}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{26}{25}=\frac{1}{2}\cdot\frac{26}{25}=\frac{26}{50}=0{,}52.$$

13. Сколькими способами можно отметить две клетки 1 × 1 на поверхности куба 3 × 3 × 3, у которых ровно одна общая сторона?

Ответ: 108.

Решение. Всего на поверхности 3 · 3 · 6 = 54 клетки. Первую клетку пары можно выбрать 54 способами, вторую — любую из 4 соседей. В произведении 54 · 4 каждая пара учтена 2 раза, поэтому всего 54 · 2 = 108 пар.

14. Неравные друг другу числа x и y таковы, что $x^2 - 2021x = y^2 - 2021y$. Чему может быть равна сумма $x + y$?

Ответ: 2021.

Решение. Преобразуем, сокращая на $x - y$ (так как $x \neq y$):
$x^2 - 2021x = y^2 - 2021y$,
$x^2 - y^2 = 2021x - 2021y$,
$(x - y)(x + y) = 2021(x - y)$,
$x + y = 2021$.

Комментарий. Интересное решение этой задачи для учеников 8 класса. Из условия числа x и y — различные корни квадратного уравнения $t^2 - 2021t + m = 0$, из теоремы Виета следует, что $x + y = 2021$.

15. На доске написано четырёхзначное число. Три пятиклассника про него сказали учителю по одной фразе. Вася сказал: «В числе есть цифра 2», Петя: «В числе есть цифра 3», Коля: «В числе есть цифра 4». Какое наименьшее число могло быть написано, если известно, что какие-то два ученика сказали правду, а третий — неправду?

Ответ: 1023.

Решение. Если число наименьшее, то сказали неправду про наибольшую цифру, то есть про «4». Наименьшее четырёхзначное число с цифрами «2» и «3» — 1023.