

Блок 6. Делимость: остатки при делении

Задания Интернет-карусели (2021)

1. Сегодня четверг. Какой день недели был 100 дней назад?
2. Найдите наименьшее четырёхзначное натуральное N такое, что $N + 1$ кратно 2, $N + 2$ кратно 3, $N + 3$ кратно 4, ..., $N + 9$ кратно 10.
3. Натуральное число N поделили с остатком на 11 и 13. Оказалось, что остатки отличаются на 1 и неполные частные отличаются на 1. Сколько таких чисел N ?
4. Число N при делении на 12 даёт остаток 7. Какой остаток при делении на 6 даёт число $2N + 5$?
5. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди чисел от 1 до 2021 так, что разность между любыми двумя числами будет составным числом?
6. В шести пакетах были конфеты: 15, 16, 18, 19, 20 и 31 штук. Маша взяла какие-то пакеты, Варя взяла еще какие-то, а Ника — оставшийся один пакет. Сколько конфет досталось Нике, если Маше досталось вдвое больше конфет, чем Вале?
7. Какие значения может принимать наибольший общий делитель чисел $2N + 1$ и $N + 8$, где N — некоторое натуральное число?
8. На доске выписано 40 чисел. Лёня нашёл все 780 попарных сумм этих чисел. Оказалось, что треть из них делится на 3, треть даёт остаток 1 и треть даёт остаток 2. Сколько из этих 40 чисел кратно трём?
9. Найдите такие натуральные числа, при делении которых на 7 частное оказывается ровно вдвое меньше остатка.
10. На столе лежало 11 блинов. Малыш Тимоша несколько раз подходил к столу. Каждый раз он целый блин или какой-то кусок успевал рвать на 6 или 11 кусков, после чего его отгоняли от стола. Отгнав Тимошу в очередной раз, мама насчитала на столе от 97 до 105 блинов и их кусков, причём никто ещё не успел съесть ни единого блина или его куска. Сколько кусков насчитала мама?
11. Сколько раз надо вычесть из числа 123 число 13, чтобы результат стал меньше, чем -2021 ?
12. Число при делении на 43 даёт остаток 7. Какой наибольший остаток может давать это число при делении на 2021?
13. Сколько значений R , при которых верна фраза «Если число при делении на 43 даёт остаток 7, то при делении на 2021 оно может давать остаток R »?

14. Начнём считать пальцы на руке следующим образом: пусть 1-ым будет большой, 2-ым — указательный, 3-им — средний, 4-ым — безымянный, 5-ым — мизинец, 6-ым — снова безымянный, 7-ым — средний, 8-ым — указательный, 9-ым — большой, 10-ым — указательный, и так далее. Какой палец будет с номером 2021?
15. Какой остаток при делении на 47 даёт разность двух чисел $20212021\dots2021 - 1102$, где в записи уменьшаемого сочетание 2021 написано ровно 2021 раз?

Блок 6. Делимость: остатки при делении

Задания Интернет-карусели (2021). Ответы и решения

1. Сегодня четверг. Какой день недели был 100 дней назад?

Ответ: вторник.

Решение. Так как $100 : 7 = 14$ (ост. 2), то ровно 14 недель назад также был четверг, а еще 2 днями ранее был вторник.

2. Найдите наименьшее четырёхзначное натуральное N такое, что $N + 1$ кратно 2, $N + 2$ кратно 3, $N + 3$ кратно 4, ..., $N + 9$ кратно 10.

Ответ: 2521.

Решение. Из условия следует, что число $N - 1$ кратно 2, 3, 4, ..., 10. Так как $\text{НОК}(2; 3; \dots; 10) = 2520$, то минимальное натуральное значение $N - 1$ равно 2520. При этом $N = 2521$.

3. Натуральное число N поделили с остатком на 11 и 13. Оказалось, что остатки отличаются на 1 и неполные частные отличаются на 1. Сколько таких чисел N ?

Ответ: 21.

Решение. Частное при делении на 11 должно быть больше на 1. Далее возможны два случая:

(1) Пусть $N = 11(d + 1) + r = 13d + (r + 1)$, $0 \leq r \leq 10$. Тогда $2d - 10 = 0$, $d = 5$. Получаем $N = 65 + (r + 1) = 66 + r$ — верно при любом возможном r . Всего 11 значений от 66 до 76.

(1) Пусть $N = 11(d + 1) + (r + 1) = 13d + r$, $0 \leq r \leq 9$. Тогда $2d - 12 = 0$, $d = 6$. Получаем $N = 77 + (r + 1) = 78 + r$ — верно при любом возможном r . Всего 10 значений от 78 до 87.

Всего 21 значение для N .

4. Число N при делении на 12 даёт остаток 7. Какой остаток при делении на 6 даёт число $2N + 5$?

Ответ: 1.

Решение. Если $N = 12d + 7$, то $2N + 5 = 24d + 19 = 6(4d + 3) + 1$.

5. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди чисел от 1 до 2021 так, что разность между любыми двумя числами будет составным числом?

Ответ: 506.

Указание. Разность между любыми 2 числами должна быть не меньше 4, поэтому чисел не более четверти (в большую сторону).

Решение. Разобьем числа на группы из 4 подряд идущих чисел: (1, 2, 3, 4), ..., (2017, 2018, 2019, 2020), осталось число 2021. Так как $2021 : 4 = 505$ (ост. 1), то получилось 505 групп. Если выбрать два числа из одной группы, то их разность будет равна 1, 2, 3 и не будет являться составным числом. Значит, можно выбрать не более 505 чисел из групп и еще одной число 2021 — всего 506 штук.

С другой стороны, возьмем числа, дающие остаток 1 при делении на 4: 1, 5, ..., 2021. Из 506 штук. Разность любых двух из них кратна 4, то есть является составным числом.

6. В шести пакетах были конфеты: 15, 16, 18, 19, 20 и 31 штук. Маша взяла какие-то пакеты, Варя взяла еще какие-то, а Ника — оставшийся один пакет. Сколько конфет досталось Нике, если Маше досталось вдвое больше конфет, чем Варе?

Ответ: 20.

Решение. Если Маше досталось вдвое больше конфет, чем Варе, то Маше и Варе досталось количество конфет, кратное 3. Общая количество конфет даёт при делении на 3 такой же остаток, как сумма $0 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 = 5$. Следовательно, Нике достался пакет, в котором число конфет даёт остаток 2 при делении на 3. Такой пакет только один, в нём 20 конфет.

7. Какие значения может принимать наибольший общий делитель чисел $2N + 1$ и $N + 8$, где N — некоторое натуральное число?

Ответ: 1, 3, 5, 15.

Решение. Заметим, что разность $2(N + 8) - (2N + 1) = 15$ делится на искомый НОД. Значит, НОД может быть равен 1, 3, 5 или 15. Все эти значения могут достигаться: 1 при $N = 3$, 3 при $N = 1$, 5 при $N = 2$, 15 при $N = 7$.

8. На доске выписано 40 чисел. Лёня нашёл все 780 попарных сумм этих чисел. Оказалось, что треть из них делится на 3, треть даёт остаток 1 и треть даёт остаток 2. Сколько из этих 40 чисел кратно трём?

Ответ: 13 или 14.

Решение. Покажем, что количества чисел, дающих разные остатки, отличаются не более чем на 1.

Пусть $a, b = a - x, c = a - y$ — количество чисел каждого остатка. Тогда один остаток, дающий парами, получается $a(a - 1)/2 + bc$ раз, другой — $c(c - 1)/2 + ab$ раз. Разность равна

$$(a(a-1)/2 + (a-x)(a-y)) - ((a-y)((a-y)-1)/2 + a(a-x)) = \\ = y(x - (y+1)/2) = 0.$$

Аналогично другая разность равна $x(y - (x+1)/2) = 0$.

Если $x \neq 0, y \neq 0$, то $2x = y + 1$ и $2y = x + 1$, откуда $x = y = 1$.

Если, например, $x = 0, y \neq 0$, то $y = -1$.

Вывод: любые два из значений a, b, c отличаются не более чем на 1. Если их сумма равна 40, то это числа 13, 13, 14. Кратных трём 13 или 14 штук.

Указание. Более существенные преобразования возникают в решении при следующих рассуждениях.

Пусть a чисел дают остаток 0, b чисел дают остаток 1, c чисел дают остаток 2. Тогда $a(a-1)/2 + bc = b(b-1)/2 + ca = c(c-1)/2 + ab = 260$. Первое уравнение переписывается в виде $(a-b)(a+b-1-2c) = 0$. Можно показать, что это возможно только для чисел 13, 13, 14.

9. Найдите такие натуральные числа, при делении которых на 7 частное оказывается ровно вдвое меньше остатка.

Ответ: 9, 18, 27.

Указание: $9 = 7 \cdot 1 + 2, 18 = 7 \cdot 2 + 4$ и $27 = 7 \cdot 3 + 6$.

Решение. Из условия остаток — чётное число, поэтому он равен 0, 2, 4 или 6. Неполное частное соответственно равно 0, 1, 2 или 3. Искомое число $0 = 7 \cdot 0 + 0$ (оно не натуральное), $9 = 7 \cdot 1 + 2, 18 = 7 \cdot 2 + 4$ и $27 = 7 \cdot 3 + 6$.

10. На столе лежало 11 блинов. Малыш Тимоша несколько раз подходил к столу. Каждый раз он целый блин или какой-то кусок успевал рвать на 6 или 11 кусков, после чего его отгоняли от стола. Отгнав Тимошу в очередной раз, мама насчитала на столе от 97 до 105 блинов и их кусков, причём никто еще не успел съесть ни единого блина или его куска. Сколько кусков насчитала мама?

Ответ: 101.

Указание: общее число кусков при делении на 5 всегда даёт остаток 1.

Решение. Когда кусок рвут на 6 или 11 кусков, общее число частей увеличивается на 5 или 10 — на число, кратное 5. Значит, конечное количество кусков даёт тот же остаток, что и начальное. Число 11 даёт остаток 1, из чисел от 97 до 105 остаток 1 даёт только число 101.

11. Сколько раз надо вычесть из числа 123 число 13, чтобы результат стал меньше, чем -2021 ?

Ответ: 165.

Решение. Так как $2021 + 123 = 2144, 2144 : 13 = 164$ (ост.12), то при вычитании 164 раза получится число больше -2021 на 12. Значит, надо вычесть еще 1 раз.

12. Число при делении на 43 даёт остаток 7. Какой наибольший остаток может давать это число при делении на 2021?

Ответ: 1985.

Решение. Если N — число, удовлетворяющее условию, то $N - 7$ кратно 43. Число 2021 кратно 43, значит, при делении $N - 7$ на 2021 число даёт остаток, кратный 43. Наибольший такой — $46 \cdot 43 = 1978$, при этом N даёт остаток $1978 + 7 = 1985$.

13. Сколько значений R , при которых верна фраза «Если число при делении на 43 даёт остаток 7, то при делении на 2021 оно может давать остаток R »?

Ответ: 47.

Решение. Если N — число, удовлетворяющее условию, то $N - 7$ кратно 43. Число 2021 кратно 43, значит, при делении $N - 7$ на 2021 число даёт остаток, кратный 43. Таких остатков 47: 0, 43, $2 \cdot 43, \dots, 46 \cdot 43$. Само число N может давать остатки $0 + 7, 43 + 7, 2 \cdot 43 + 7, \dots, 46 \cdot 43 + 7$.

14. Начнём считать пальцы на руке следующим образом: пусть 1-ым будет большой, 2-ым — указательный, 3-им — средний, 4-ым — безымянный, 5-ым — мизинец, 6-ым — снова безымянный, 7-ым — средний, 8-ым — указательный, 9-ым — большой, 10-ым — указательный, и так далее. Какой палец будет с номером 2021?

Ответ: мизинец.

Решение. Большой палец считается 1-ым, 9-ым, ..., значит, нумерация идёт с циклом длины $9 - 1 = 8$. Число 2021 при делении на 8 даёт остаток 5. Значит, после нескольких циклов начнётся новый отчёт до 5 — 5-ым будет мизинец.

15. Какой остаток при делении на 47 даёт разность двух чисел $20212021\dots2021 - 1102$, где в записи уменьшаемого сочетание 2021 написано ровно 2021 раз?

Ответ: 26.

Указание: 2021 кратно 47, 1102 даёт остаток 21.

Решение. Число 2021 кратно 47, поэтому $20212021\dots2021$ делится на 47. Число 1102 даёт остаток 21, поэтому разность даёт остаток $47 - 21 = 26$.