Блок 6. Круги Эйлера

Интернет-карусель (2021). Задания

1. Бабушка и дедушка поливают на своём огороде кусты клубники. Сначала бабушка полила 17 кустов. Затем дедушка полил 19 кустов. В итоге 7 кустов оказались политы дважды, а 11 кустов остались без полива. Сколько всего кустов клубники на огороде?

2. В 5 «М» классе половина учеников ходят на математический кружок, половина посещает шахматную секцию. Шестеро не ходят ни на этот кружок, ни в эту секцию, а 10 учеников ходят на кружок, но не ходят на секцию. Сколько учеников в 5 «М» классе?

3. В 5 «К» классе каждый ходит на шахматы или математику: две трети учеников ходят на математический кружок, половина посещает шахматную секцию. Четверо ходят и на кружок, и на секцию. Сколько учеников в 5 «К» классе?

4. В 5 «Н» классе две трети учеников ходят на математический кружок, половина посещает шахматную секцию. Пятеро не ходят ни на этот кружок, ни в эту секцию, а 10 учеников ходят на кружок, но не ходят на секцию. Сколько учеников в 5 «Н» классе?

5. У Маши из последних 60 дней было 32 дня, когда удалось вкусно покушать, 31 день, в которые она выспалась, 38 дней, когда удалось встретиться с подругой Дашей. Дней, когда удалось выспаться и встретиться с Дашей, было 21. Когда Маша выспалась и вкусно поела — 17 дней. Дней, когда и Дашу увидела, и вкусно поела — 19. Но больше всех запомнились Маше те 11 дней, когда и с Дашей встретилась, и вкусно поела, и смогла выспаться. Сколько было дней (из этих 60), когда не удалось ничего из указанного?

6. Напишите *наибольшее* семизначное натуральное число, в записи которого нет равных цифр, ровно четыре цифры не более 6, ровно пять цифр не менее 3.

7. Напишите *наименьшее* семизначное натуральное число, в записи которого нет равных цифр, ровно четыре цифры не более 6, ровно пять цифр не менее 3.

8. Три одноклассника готовились к олимпиаде. Им дали список из 60 задач и каждую задачу кто–то из них решил. Каждый решил ровно 35 задач. Учитель называет задачу *простой*, если её решили все трое, и *сложной*, если её решил только один из троих. На сколько *простых* задач больше, чем *сложных*?

9. Забор состоит из 2021 доски. Сначала Петя покрасил белой краской 2-ую, 5-ую, 8-ую, … и так далее каждую третью доску. Затем Вася покрасил синей краской 3-ую, 7-ую, 11-ую, … и так далее каждую четвертую доску. Сколько досок останутся неокрашенными?

10. В первой группе детского сада 25 ребятишек. Каждому задали 3 вопроса: «Есть ли у тебя синяя шапка?», «Есть ли у тебя красная шапка?», «Есть ли у тебя зеленая

шапка?». Были получены ответы только «да» и «нет», каждый утвердительно ответил на 1 или 2 вопроса. Сколько ответили «да» только на один вопрос, если всего было дано 40 ответов «нет»?

11. Во второй группе детского сада каждому из ребятишек задали 3 вопроса: «Есть ли у тебя синяя шапка?», «Есть ли у тебя красная шапка?», «Есть ли у тебя зеленая шапка?». Были получены ответы только «да» и «нет», каждый утвердительно ответил на 1 или 2 вопроса. Всего дано 45 ответов «нет». Какое наименьшее количество ребятишек могло быть в такой группе?

12. У Васи и Пети есть 100 карточек, на них написаны все числа от 1 до 100, на каждой — какое-то одно число. Вася взял себе карточки, на которых есть цифра 1, Петя забрал остальные. Затем ребята обменялись карточками с цифрой 2. Сколько карточек стало у Васи?

13. У Васи и Пети есть 100 карточек, на них написаны все числа от 1 до 100, на каждой — какое-то одно число. Вася взял себе карточки, на которых есть цифра 1, Петя забрал остальные. Затем ребята обменялись карточками с цифрой 2. После этого ребята обменялись карточками с цифрой 3. Сколько карточек стало у Васи?

14. В классе 28 учеников. У 20 из них в пенале есть ручки, у 13 — карандаши, у 11 — ластики. У 10 человек только два вида письменных принадлежностей. Шестеро не принесли ни ручек, ни карандашей, ни ластиков. У скольких учеников есть и ручка, и карандаш, и ластик?

15. В магазин завезли поровну арбузов и дынь. Четверть из них оказались гнилыми. Из арбузов гнилые — треть. Хороших (не гнилых) дынь — 20 штук. Сколько привезли хороших (не гнилых) арбузов?

Блок 6. Круги Эйлера

Интернет-карусель (2021). Задания, указания, решения

К заданиям интернет-карусели приведены решения, в которых не говорится про изображение ситуации с помощью кругов Эйлера. Рекомендуем при разборе решений заданий иллюстрировать их такими диаграммами. Пример этого показан в комментарии к решению задачи № 5.

1. Бабушка и дедушка поливают на своём огороде кусты клубники. Сначала бабушка полила 17 кустов. Затем дедушка полил 19 кустов. В итоге 7 кустов оказались политы дважды, а 11 кустов остались без полива. Сколько всего кустов клубники на огороде?

   Ответ: 40.

   Решение. Дедушка полил 19 – 7 = 12 кустов, которые не полила бабушка. Значит, всего в огороде 17 + 12 + 11 = 40 кустов клубники.

2. В 5 «М» классе половина учеников ходят на математический кружок, половина посещает шахматную секцию. Шестеро не ходят ни на этот кружок, ни в эту секцию, а 10 учеников ходят на кружок, но не ходят на секцию. Сколько учеников в 5 «М» классе?

   Ответ: 32.

   Решение. Не ходят на секцию 10 + 6 = 16 учеников — это половина класса. Значит, всего в классе 32 ученика.

3. В 5 «К» классе каждый ходит на шахматы или математику: две трети учеников ходят на математический кружок, половина посещает шахматную секцию. Четверо ходят и на кружок, и на секцию. Сколько учеников в 5 «К» классе?

   Ответ: 24.

   Решение. Четверо составляют $2/3 + 1/2 - 1 = 1/6$ класса, поэтому в классе $4 \cdot 6 = 24$ ученика.

4. В 5 «Н» классе две трети учеников ходят на математический кружок, половина посещает шахматную секцию. Пятеро не ходят ни на этот кружок, ни в эту секцию, а 10 учеников ходят на кружок, но не ходят на секцию. Сколько учеников в 5 «Н» классе?

   Ответ: 30.

   Решение. На секцию не ходят 5 + 10 = 15 учеников. Так как половина учеников ходят на секцию и, как следствие, половина не ходит, то всего в классе $15 \cdot 2 = 30$ учеников.

5. У Маши из последних 60 дней было 32 дня, когда удалось вкусно покушать, 31 день, в которые она выспалась, 38 дней, когда удалось встретиться с подругой Дашей. Дней, когда удалось выспаться и встретиться с Дашей, было 21. Когда Маша выспалась и вкусно поела — 17 дней. Дней, когда и Дашу увидела, и вкусно поела — 19. Но больше всех запомнились Маше те 11 дней, когда и с Дашей встретилась, и вкусно поела, и смогла выспаться. Сколько было дней (из этих 60), когда не удалось ничего из указанного?

   Ответ: 5.

   Решение. Каждый день обладает некоторыми из 3 свойств: Е = «вкусно покушала», С = «выспалась», Д = «встретилась с Дашей».

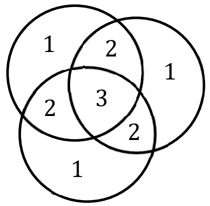
   Всеми тремя свойства обладают 11 дней.

   Только двумя свойства Е и С обладают 17 – 11 = 6 дней, С и Д — 21 – 11 = 10 дней, Д и Е — 19 – 11 = 8 дней. Всего ровно двумя свойства обладают 6 + 10 + 8 = 24 дня.

   Только свойством С обладают 31 – 11 – 6 – 10 = 4 дня, только свойством Д — 38 – 11 – 8 – 10 = 9 дней, только свойством Е — 32 – 11 – 6 – 8 = 7 дней. Всего ровно одним свойством из трёх обладают 4 + 9 + 7 = 20 дней.

   Значит, хотя бы одним из свойств обладают 11 + 24 + 20 = 55 из 60 дней, а 60 – 55 = 5 дней не обладают ни одним из свойств.

   Комментарий. Дни, обладающие свойствами, можно изобразить в виде диаграммы из трёх кругов Эйлера, как показано на рисунке.

   Заметим, что в условии дано количество дней, попавших на диаграмме в часть 3. В решении задачи сначала находят число дней в частях, отмеченных цифрой 2, за затем — цифрой 1.

6. Напишите *наибольшее* семизначное натуральное число, в записи которого нет равных цифр, ровно четыре цифры не более 6, ровно пять цифр не менее 3.

   Ответ: 9876521.

   Указание. В числе три цифры из набора 7, 8, 9, две цифры из набора 0, 1, 2 и две цифры из набора 3, 4, 5, 6. Наименьшее число 9876521.

Решение. Разделим цифры на группы: A = (0, 1, 2), B = (3, 4, 5, 6), C = (7, 8, 9). В числе из групп A и B ровно 4 цифры, из групп B и C ровно 5 цифр. Всего в числе 7 цифр, поэтому в числе 7 – 5 = 2 цифры из группы A, 7 – 4 = 3 цифры из группы C, остальные 7 – 2 – 3 = 2 цифры из группы B.

Чтобы составить наибольшее число, надо взять наибольшие цифры из указанных групп: 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9. Наибольшее число из таких цифр — 9876521.

7. Напишите *наименьшее* семизначное натуральное число, в записи которого нет равных цифр, ровно четыре цифры не более 6, ровно пять цифр не менее 3.

Ответ: 1034789.

Указание. В числе три цифры из набора 7, 8, 9, две цифры из набора 0, 1, 2 и две цифры из набора 3, 4, 5, 6. Наименьшее число 1034789.

Решение. Разделим цифры на группы: A = (0, 1, 2), B = (3, 4, 5, 6), C = (7, 8, 9). В числе из групп A и B ровно 4 цифры, из групп B и C ровно 5 цифр. Всего в числе 7 цифр, поэтому в числе 7 – 5 = 2 цифры из группы A, 7 – 4 = 3 цифры из группы C, остальные 7 – 2 – 3 = 2 цифры из группы B.

Чтобы составить наименьшее число, надо взять наименьшие цифры из указанных групп: 0, 1, 3, 4, 7, 8, 9. Наименьшее число из таких цифр — 1034789.

8. Три одноклассника готовились к олимпиаде. Им дали список из 60 задач и каждую задачу кто–то из них решил. Каждый решил ровно 35 задач. Учитель называет задачу *простой*, если её решили все трое, и *сложной*, если её решил только один из троих. На сколько *простых* задач больше, чем *сложных*?

Ответ: 15.

Решение. В сумму 35 + 35 + 35 = 105 простая задача входит 1 раз, сложная — 3 раза, остальные — 2 раза. В сумму 60 + 60 = 120 каждая задача входит 2 раза. Значит, простых задач больше, нежели сложных, на 120 – 105 = 15.

Комментарий. Данные рассуждения более понятны, если ввести несколько переменных. Пусть a, b, c — число простых, средних и сложных задач. Тогда, с одной стороны, общее число задач равно $a + b + c = 60$. С другой стороны, имеет место соотношение $35 \cdot 3 = a + 2b + 3c$.

Получаем $60 \cdot 2 - 35 \cdot 3 = 2(a + b + c) - (a + 2b + 3c) = a - c$, откуда находим искомое $a - c = 15$.

9. Забор состоит из 2021 доски. Сначала Петя покрасил белой краской 2-ую, 5-ую, 8-ую, … и так далее каждую третью доску. Затем Вася покрасил синей краской 3-ую, 7-ую, 11-ую, … и так далее каждую четвертую доску. Сколько досок останутся неокрашенными?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2020-2021 учебный год

Ответ: 1010.

Решение. Общие: 11-ая, 23-я, … доски. Ситуация повторяется каждые 12 досок. В таблице выделен первый кусок, повторяющийся далее.

Доска	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	…
Петя		X			X			X			X			X			X			X			X		…
Вася			X				X				X				X				X				X		…

Заметим 2021 : 12 = 168 (ост. 5). В каждой группе не окрашены 6 досок, в остатке из 5 досок — 2 штуки. Всего 168 · 6 + 2 = 1010 штук.

10. В первой группе детского сада 25 ребятишек. Каждому задали 3 вопроса: «Есть ли у тебя синяя шапка?», «Есть ли у тебя красная шапка?», «Есть ли у тебя зеленая шапка?». Были получены ответы только «да» и «нет», каждый утвердительно ответил на 1 или 2 вопроса. Сколько ответили «да» только на один вопрос, если всего было дано 40 ответов «нет»?

Ответ: 15.

Решение. Всего дано 25 · 3 = 75 ответов, 40 ответов «нет» и 75 – 40 = 35 ответов «да». При этом 35 – 25 = 10 человек ответили «да» дважды, значит, 25 – 10 = 15 ребятишек ответили «да» только на один вопрос.

11. Во второй группе детского сада каждому из ребятишек задали 3 вопроса: «Есть ли у тебя синяя шапка?», «Есть ли у тебя красная шапка?», «Есть ли у тебя зеленая шапка?». Были получены ответы только «да» и «нет», каждый утвердительно ответил на 1 или 2 вопроса. Всего дано 45 ответов «нет». Какое наименьшее количество ребятишек могло быть в такой группе?

Ответ: 23.

Решение. Ответ «нет» могло дать не менее 23 ребятишек, иначе кто-то дал ответ «нет» трижды. С другой стороны, в группе могло быть 23 ребенка: 22 из них дали ответ «нет» дважды, 1 ребенок — только 1 раз.

12. У Васи и Пети есть 100 карточек, на них написаны все числа от 1 до 100, на каждой — какое-то одно число. Вася взял себе карточки, на которых есть цифра 1, Петя забрал остальные. Затем ребята обменялись карточками с цифрой 2. Сколько карточек стало у Васи?

Ответ: 35.

Решение. Вася взял карточки с числами 1, 10-19, 21, 31, …, 91, 100 — всего 20 штук. Потом он отдал Васе 12 и 21 — 2 штуки. С цифрой «2» карточки с числами 2, 12, 20-29, 32, 42, … 92 — 19 штук. Две из них у Васи, поэтому Петя отдал Васе 17 карточек. У Васи стало 20 – 2 + 17 = 35 карточек.

13. У Васи и Пети есть 100 карточек, на них написаны все числа от 1 до 100, на каждой — какое-то одно число. Вася взял себе карточки, на которых есть цифра 1, Петя забрал остальные. Затем ребята обменялись карточками с цифрой 2. После этого ребята обменялись карточками с цифрой 3. Сколько карточек стало у Васи?

    Ответ: 46

    Решение. Выпишем все числа с цифрами «1», «2», «3»: это числа 1, 2, 3, три десятка чисел 10-19, 20-29, 30-39 и еще числа 41, 42, 43, 51, 52, 53, ..., 91, 92, 93, 100 — всего 3 + 30 + 19 = 52 штуки. Все из них получал Вася. Он вернул те, на которых две указанные цифры — это числа 12, 13, 21, 31, 23, 32 — 6 штук. Значит, у Васи осталось 52 – 6 = 46 карточек.

14. В классе 28 учеников. У 20 из них в пенале есть ручки, у 13 — карандаши, у 11 — ластики. У 10 человек только два вида письменных принадлежностей. Шестеро не принесли ни ручек, ни карандашей, ни ластиков. У скольких учеников есть и ручка, и карандаш, и ластик?

    Ответ: 3.

    Решение. В сумме 20 + 13 + 11 = 44 по 1 разу учтены ученики с одним предметом, 2 раза — с двумя, 3 раза — с тремя. В 44 – 10 = 34 по разу учтены ученики с 1 или 2 предметами и 3 раза — с тремя. В 34 – 28 = 6 дважды учтены только ученики с 3 предметами, всего с 3 предметами 6 : 2 = 3 ученика.

15. В магазин завезли поровну арбузов и дынь. Четверть из них оказались гнилыми. Из арбузов гнилые — треть. Хороших (не гнилых) дынь — 20 штук. Сколько привезли хороших (не гнилых) арбузов?

    Ответ: 16.

    Решение. Гнилые арбузы составляют $1/2 \cdot 1/3 = 1/6$ от общего количества арбузов и дынь. Значит, гнилых дынь $1/4 - 1/6 = 1/12$ от общего количества или $1/12 : 1/2 = 1/6$ от числа дынь. Значит, из дынь $5/6$ — хорошие, что равно 20 штук. Значит, дынь $20 : 5/6 = 24$, арбузов столько же. Из арбузов $2/3$ хорошие, их количество равно $2/3 \cdot 24 = 16$.