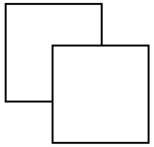
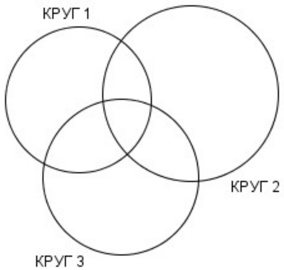
Блок 6. Круги Эйлера

Подготовительное занятие. Задания

- *Салфетки*. На столе лежат две квадратные салфетки со стороной 5 см, как показано на рисунке справа. Они накрыли площадь, равную 42 см^2. Какова площадь их перекрытия?

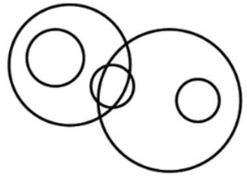


- *Кружки*. В классе 32 ученика. Из них 15 занимаются в музыкальном кружке, 21 — в математическом. Сколько человек посещают оба кружка?
- *Круги*. В трёх кругах, показанных на рисунке справа, стоят невидимые гномы. В первом — 7 гномов, во втором — 8 гномов, в третьем — 10 гномов. Два гнома стоят и в первом кругу, и во втором, трое — и во втором, и в третьем, трое — и в третьем, и в первом. Один гном стоит во всех трёх кругах. Сколько всего гномов стоит в кругах?



1. В группе 29 мальчиков: 15 из них ходят на робототехнику, 21 — на моделирование парусников. Сколько мальчишек посещают оба кружка, если известно, что только Вовочка не ходит ни в один из двух кружков?
2. В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60% класса, причем каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса были и там, и там?
3. По данным опроса, проведенного в 7 «М» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются еще и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Германом не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «М», если известно, что их больше 20, но меньше 30?
4. Сколько детей в семье, если 7 из них любят капусту, 6 — морковь, 5 — горох, 4 — капусту и морковь, 3 — капусту и горох, 2 — морковь и горох, а 1 любит и капусту, и горох, и морковь?
5. В городе 67 светофоров. На 47 из них горит красный свет, на 35 — жёлтый, причём на 23 — красный и жёлтый одновременно. Кроме того, на 20 светофорах горит зелёный свет, на 12 — красный и зелёный, на 11 — жёлтый и зелёный, а на 5 — все три света сразу. Сколько светофоров в городе не горят вообще?

6. Ваня, Петя и Оля решили 10 олимпиадных задач. Петя из этих задач решил 7, Оля — 8 задач, а Ваня — 9 задач. Назовем задачу лёгкой, если её решили все трое. Сколько лёгких задач было среди десяти решённых?
7. Лесник считал сосны в лесу. Он обошёл 5 кругов, изображённых на рисунке, и в каждом круге насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?



8. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Каково наименьшее количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру?

Блок 6. Круги Эйлера

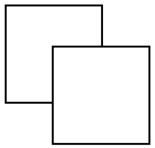
Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Этот блок занятий посвящен решению текстовых задач с помощью кругов Эйлера. Цель занятия — навязать ученикам удобное изображение условия задачи с помощью множеств и научить использовать интуитивно понятную формулу включения-исключения для двух и трёх множеств.

Как обычно, сначала предлагаем задачи, которые можно дать ребятам в начале занятия для самостоятельного решения. Обсуждение решений этих задач продемонстрирует основные идеи, которые помогут в дальнейшем.

Конечно, желательно обсудить способы решения, предлагаемые школьниками. Надеемся, что в каждой группе найдётся школьник, чей ход мыслей будет близок к рассуждениям, приведенным ниже в решениях. В данной теме, полезно рассмотреть разные способы и то, как они выглядят на картинках (кругах Эйлера). Также и в задачах для самостоятельного решения (с номерами) стоит засчитывать любые верные решения, а не только те, что получены с помощью кругов Эйлера. Важно потом показать рассуждения кругами Эйлера, а выбор «пользоваться таким способом или нет» ученик должен делать сам.

- *Салфетки*. На столе лежат две квадратные салфетки со стороной 5 см, как показано на рисунке справа. Они накрыли площадь, равную 42 см². Какова площадь их перекрытия?



  Ответ. 8 см².

  Решение. Общая площадь двух салфеток равна 25 + 25 = 50 см². С другой стороны, эта сумма состоит из площади, которую накрыли салфетки (42 см²) и площади пересечения. Площадь перекрытия равна 50 – 42 = 8 см².

  Комментарий. Можно сразу обратить внимание учеников на соотношение: объединение двух множеств (в данном случае площадь покрытия) равна сумме элементов обоих множеств (в данном случае — площадей салфеток) за вычетом их пересечения (площади перекрытия). Это и есть формула включения-исключения для двух множеств.

- *Кружки*. В классе 32 ученика. Из них 15 занимаются в музыкальном кружке, 21 — в математическом. Сколько человек посещают оба кружка?

  Ответ: 4 ученика.

  Решение. Всего в списках обоих кружков 15 + 21 = 36 человек. Это больше количества детей в классе, так как какие-то дети включены в оба списка (они ходят на оба кружка). Таких учеников 36 – 32 = 4 человека.

  Комментарий 1. Обратите внимание учеников, что рассуждения в решении похожи на рассуждения в задаче про салфетки: объединение двух множеств (здесь — количество учеников класса) равна сумме элементов обоих множеств (в данном случае — количество ребят в кружках) за вычетом их пересечения (число тех, кто ходит в оба кружка).

  Комментарий 2. Полезно показать, что решение можно сопроводить картинкой, показанной справа. Это еще больше «роднит» задачи про салфетки и кружки.

  Комментарий 3. Можно задать такие вопросы:

  - Сколько ребят ходит в математический кружок, но не ходят в музыкальный?

  Ответ: 32 – 15 = 17.

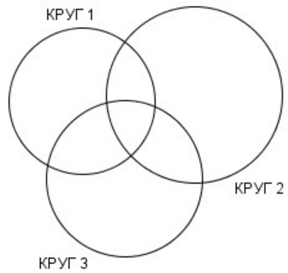
  - Сколько ребят ходит в музыкальный кружок, но не ходят в математический?

  Ответ: 32 – 21 = 11.

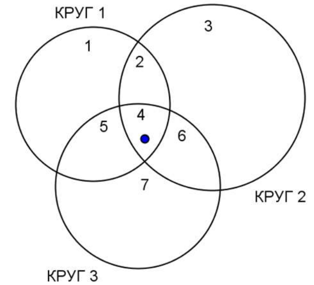
  Из ответов на эти вопросы складывается другое решение. Только на математический кружок ходит 17 человек, только на музыкальный кружок — 11 человек. Значит, 32 – 17 – 11 = 4 человека ходит в оба кружка.

  Возможно, некоторые ученики Вашего кружка решали задачу именно так.

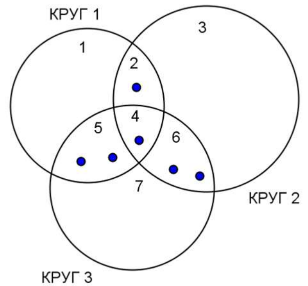
- *Круги*. В трёх кругах, показанных на рисунке справа, стоят невидимые гномы. В первом — 7 гномов, во втором — 8 гномов, в третьем — 10 гномов. Два гнома стоят и в первом кругу, и во втором, трое — и во втором, и в третьем, трое — и в третьем, и в первом. Один гном стоит во всех трёх кругах. Сколько всего гномов стоит в кругах?



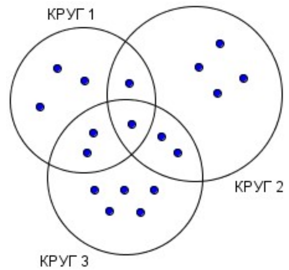
  Решение. Пересечения кругов образуют на картинке 7 частей, про каждую из которых можно узнать, сколько там стоит гномов. Пронумеруем эти части как показано на рисунке. Из условия ясно, что в части 4 стоит только один гном (отметим его точкой).



Из условия в круге 1 и круге 2 стоят два гнома. Значит, в части 2 находится 2 – 1 = 1 гном. Аналогично, в части 6 всего 3 – 1 = 2 гнома, в части 5 будет 3 – 1 = 2 гнома. Отметим их на картинке.



По условию, в круге 1 стоит 7 гномов, из которых 1 + 1 + 2 = 4 уже отмечено на картинке. Значит, в части 1 стоят 7 – 4 = 3 гнома. Аналогично, в части 3 стоят 8 – (1 + 1 + 2) = 4 гнома, в части 7 стоят 10 – (2 + 1 + 2) = 5 гномов. Результат показан на картинке.



Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2020-2021 учебный год

Теперь достаточно найти общее число отмеченных точек. Их 18.

Комментарий. Важно рассмотреть способ решения, демонстрирующий формулу включения-исключения для трёх множеств. Он более сложен для понимания, но гораздо полезнее и перспективнее в дальнейшем.

Заметим, сумма 7 + 8 + 10 = 25 — не общее число гномов, в неё некоторые гномы входят 2 раза, а один (который во всех трёх кругах) — три раза. Вычтем тех, кто в двух кругах: 25 – (2 + 3 + 3) = 17. Теперь гномы, стоящие в частях 2, 5 и 6, учтены один раз. А гном, стоящий во всех трёх кругах, был учтён 3 раза, а теперь его три раза «вычли», то есть, он не учитывается. Добавим его и получим окончательный ответ: 17 + 1 = 18.

Вторая часть занятия — самостоятельное решение задач «с номерами».

1. В группе 29 мальчиков: 15 из них ходят на робототехнику, 21 — на моделирование парусников. Сколько мальчишек посещают оба кружка, если известно, что только Вовочка не ходит ни в один из двух кружков?

   Ответ: 8 мальчиков.

   Решение. Задача практически идентична задаче про *кружки*, за одним исключением — есть Вовочка, который никуда не ходит. Тогда из суммарного числа детей из списков нужно будет вычесть не 29, а из 28: (15 + 21) – 28 = 8.

2. В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60% класса, причем каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса были и там, и там?

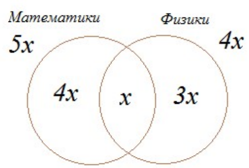
   Ответ: 40%.

   Решение. Аналогично задаче про *кружки*: 80 + 60 – 100 = 40.

   Комментарий. Обратите внимание, что здесь проценты можно складывать и вычитать потому, что они берутся от одного числа — общего числа учеников класса. Сравните со следующей задачей.

3. По данным опроса, проведенного в 7 «М» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются еще и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Германом не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «М», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

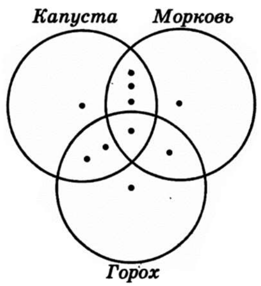
Ответ: 26 человек.



Решение. Количество человек в 7 «М» без учета Пети и Германа более 18 и менее 28, от есть от 19 до 27. Пусть n учеников интересуются одновременно и математикой, и физикой. Тогда всего математикой интересуются $5n$, а физикой — $4n$ учеников. Значит, математикой или физикой интересуются $4n + n + 3 = 8$ учеников (см. рисунок). В указанных границах есть только одно число, кратное восьми, — число 24. Следовательно, $8n = 24$, а всего в классе 26 учеников.

4. Сколько детей в семье, если 7 из них любят капусту, 6 — морковь, 5 — горох, 4 — капусту и морковь, 3 — капусту и горох, 2 — морковь и горох, а 1 любит и капусту, и горох, и морковь?

Ответ: 10 детей.



Решение. Нарисуем 3 круга — капустный, морковный и гороховый, как показано на рисунке справа. Будем изображать людей точками и, начав с одной точки в пересечении всех кругов (это единственный «вселюбящий» ребенок). Получаем задачу, аналогичную задаче о *точках*. Так же рассуждая, расставим остальные точки.

Комментарий. Если количество предметов или объектов в задаче не велико, то можно, обозначив их точками или звездочками, смело рисовать круги Эйлера и расставлять «точки».

5. В городе 67 светофоров. На 47 из них горит красный свет, на 35 — жёлтый, причём на 23 — красный и жёлтый одновременно. Кроме того, на 20 светофорах горит зелёный свет, на 12 — красный и зелёный, на 11 — жёлтый и зелёный, а на 5 — все три света сразу. Сколько светофоров в городе не горят вообще?

Ответ. 6 светофоров.

Решение 1. Нарисуем 3 круга, первый будет обозначать множество светофоров, у которых горит красный свет, второй — жёлтый, третий — зелёный. Заполним круги, аналогично задаче про *точки*. Посчитаем, сколько светофоров, на которых горит хоть какой-то свет: 17 + 6 + 2 + 18 + 6 + 7 + 5 = 61. Получается, что в городе не работают 6 светофоров.

Замечание. Решение 1 аналогично первому решению задач про *точки*. Можно получить решение аналогичное второму решению этой задачи.

Решение 2. Сложим вместе все светофоры на которых горит красный свет, жёлтый свет и зелёный свет. Как нетрудно заметить, мы посчитали дважды светофоры, на которых работают какие-то 2 сигнала. Тогда нужно вычесть число таких светофоров. Но тогда мы уберем все светофоры, у которых работают все 3 сигнала — нужно их добавить. Получим число работающих светофоров в городе: 47 + 35 + 20 – (23 + 12 + 11) + 5 = 61.

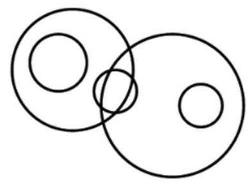
6. Ваня, Петя и Оля решили 10 олимпиадных задач. Петя из этих задач решил 7, Оля — 8 задач, а Ваня — 9 задач. Назовем задачу лёгкой, если её решили все трое. Сколько лёгких задач было среди десяти решённых?

Ответ: от 4 до 7 задач.

Решение. Заметим, что лёгких задач не может быть больше 7 (столько задач всего решил Петя). Теперь посчитаем, сколько задач точно не могут быть лёгкими. Это 10 – 7 = 3 задачи из общего списка, не решенные Петей, 10 – 8 = 2 задачи не решены Олей, 10 – 9 = 1 задача не решена Ваней. Всего может быть максимум (когда все эти задачи разные) 3 + 2 + 1 = 6 нелегких задач, то есть окажутся легкими 4 задачи.

Не трудно указать ситуации, когда ответом на вопрос являются числа 4, 5, 6 и 7. Сделайте это со своими учениками.

7. Лесник считал сосны в лесу. Он обошёл 5 кругов, изображённых на рисунке, и в каждом круге насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?



Ответ: не может.

Решение 1. Допустим, что лесник прав. Посмотрим на левый и правый маленькие круги. В каждом из них лесник насчитал по три сосны. Значит, других сосен в больших кругах не должно быть. Но тогда в маленьком центральном круге не должно быть вообще ни одной сосны.

Решение 2. Судя по трём маленьким кругам, сосен не меньше 9. Но судя по большим кругам, сосен не больше шести. Противоречие.

Комментарий. В этой задаче не используется формула включения-исключений.

8. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Каково наименьшее количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру?

Ответ. 356 номеров.

Решение. Разберем несколько случаев.

(1) Номер содержит комбинацию 237. Ее можно расположить в номере тремя способами: $**237$, $*237*$, $237**$ (тут $*$ — неизвестная цифра, любая от 0 до 9). В каждом из них каждую из оставшихся цифр можно выбрать 10 способами. Всего получаем: $3 \cdot 10 \cdot 10 = 300$ номеров.

(2) Номер содержит комбинации 23 и 37, причем 23 расположена левее 37. Это ситуации $*2337$, $23*37$, $2337*$. Оставшуюся цифру можно выбрать 10 способами и вставить ее на одно из 3 мест. Всего 30 номеров.

(3) Аналогично, есть 30 номеров, в которых 23 расположена правее 37.

Всего $300 + 30 + 30 = 360$.

Заметим, что множества номеров, рассмотренные в случаях, пересекаются: номера 23723, 23237, 23737 и 37237 мы сосчитали дважды. Значит, ответ в задаче $360 - 4 = 356$.