Математическая вертикаль, 8 класс (1 апреля 2020)

Задания карусели. Ответы и указания

1. Найдите значение выражения

$$21-\left(2\cdot x-x:\frac{7}{6}\right):\frac{1}{21}\cdot y,$$

где $x=1/3$, $y=3/4$.

2. Костя, Петя и Ваня играют в шахматы. Каждый раз, когда в партии кто-то проигрывает, то он уступает место другу, который эту партию пропустил. В итоге оказалось, что Костя сыграл 10 партий, Петя — 21 партию. Сколько партий сыграл Ваня?

3. Какова сумма всех натуральных чисел от 1 до 204, среди которых нет чисел, оканчивающихся на ноль?

4. В примере на деление все цифры, кроме одной, заменили звёздочками. Чему было равно частное?

```
* * * * * * * | * *
* * *         |---------
-----           * * 8 * *
    * *
    * *
    ---
      * * *
      * * *
      -----
          0
```

5. Дан прямоугольник $ABCD$. Внутри него лежит такая точка M, что $MB=7$, $MC=9$, $MD=10$. Чему равно MA^2?

6. Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое делится на 7 и записывается четырьмя различными цифрами.

7. Сколько пятизначных чисел, в записи каждого из которых есть хотя бы одна цифра «2»?

8. При каких m один из корней уравнения $x^2+111x-m^2+1=0$ будет равен нулю?

9. До сушки абрикос на 52 % состоит из воды. После сушки он будет состоять из воды лишь на 4 %. На сушку отправили 1000 кг абрикосов. На сколько кг уменьшится их вес после сушки?

10. Найдите целые значения x, при которых функция

$$y=\sqrt{20+2\sqrt{91+6x-x^2}}-\sqrt{20-2\sqrt{91+6x-x^2}}$$

принимает целые значения.

11. Для каких натуральных чисел x найдётся такое натуральное число y, что выполнено $x^2-y^2=65$?

12. Числа x, y, z, u, v удовлетворяют условию

$$\begin{cases} x+y+z+u=5,\\ y+z+u+v=1,\\ z+u+v+x=2,\\ u+v+x+y=0,\\ v+x+y+z=4. \end{cases}$$

Чему равно значение выражения $x+2y+3z+4u+5v$?

13. Точки M, N, K и P — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$. Найдите периметр четырехугольника $MNKP$, если сумма диагоналей AC и BD равна 20.

14. Отношение произведения двух чисел к их сумме квадратов равно 0,48. Чему равно отношение меньшего из них к большему?

15. Майкл Фелпс за 20 мин проплывает против течения реки 1,2 км, а по течению за 25 мин на 2,7 км больше. Сколько км/ч составляет скорость Майкла Фелпса?

16. В равнобокой трапеции $ABCD$ на основании AD отмечена такая точка L, что BL — биссектриса угла B трапеции. Оказалось, что $BLDC$ — ромб. Найдите длину AD, если периметр трапеции равен 60.

17. Какие из формул задают линейную функцию, принимающую нецелое значение при любом целом значении аргумента?

(1) $y=x/19-1/4$,
(2) $y=3x/26+4/39$,
(3) $y=2{,}3x+0{,}4$,
(4) $y=9x/10-1/5$,
(5) $y=23{,}5x+0{,}3$.

18. Пете на день рождения подарили новый электролобзик с функцией подсчёта длины сделанных пропилов. Чтобы опробовать подарок, Петя взял квадратный кусок фанеры со стороной 60 см и распилил его на двух видов: со стороной 10 см и со стороной 30 см. Сколько всего получилось квадратов, если электролобзик показывает общую длину пропилов 2 м 40 см?

Математическая вертикаль, 8 класс (1 апреля 2020)

Задания карусели. Ответы и указания

1. Найдите значение выражения

$$21-\left(2\cdot x-x:\frac{7}{6}\right):\frac{1}{21}\cdot y,$$

где $x=1/3$, $y=3/4$.

Ответ: 15.

2. Костя, Петя и Ваня играют в шахматы. Каждый раз, когда в партии кто-то проигрывает, то он уступает место другу, который эту партию пропустил. В итоге оказалось, что Костя сыграл 10 партий, Петя — 21 партию. Сколько партий сыграл Ваня?

Ответ: 11.

Решение. Из любых двух подряд идущих партий по крайней мере в одной играл Костя. Значит, общее число партий не более 21. С другой стороны, Петя сыграл 21 партию. Значит, прошла 21 партия, во всех играл Петя, против него Костя сыграл 10 раз, а Ваня — (21 – 10) = 11 раз.

3. Какова сумма всех натуральных чисел от 1 до 204, среди которых нет чисел, оканчивающихся на ноль?

Ответ: 18810.

Решение. Сумма всех чисел от 1 до 204 равна (1 + 202) · 204 : 2 = 20910. Числа, оканчивающиеся на 0: 10, 20, …, 90, 100, 110, 120, …, 190, 200. Их сумма равна 10 · (1 + 2 + … + 20) = 10 · 21 · 20 : 2 = 2100. Следовательно, сумма чисел, которые не оканчиваются на ноль, равна: 20910 – 2100 = 18810.

4. В примере на деление все цифры, кроме одной, заменили звёздочками. Чему было равно частное?

```
* * * * * * * | * *
* * *         |-----
-----           * * 8 * *
    * *
    * *
    -----
      * * *
      * * *
      -----
          0
```

Ответ: 90809.

ЦДО ЦПМ (г. Москва)
Международные соревнования
«Интернет-карусели»

Решение. Из расположения чисел в примере видно, что в частном 2-я и 4-я цифры — нули. Там же видно, что делитель, умноженный на 8, не больше 99, значит, он равен 10, 11 или 12. Каждое из этих чисел даёт трёхзначное произведение только при умножении на 9, поэтому первая и последняя цифры частного равны 9.

Замечание. Далее не трудно понять, что в качестве делителя подходит только 12, после чего не трудно восстановить весь пример. В нём 1089708 : 12 = 90809.

5. Дан прямоугольник $ABCD$. Внутри него лежит такая точка M, что $MB = 7$, $MC = 9$, $MD = 10$. Чему равно MA^2?

Ответ: 68.

Указание. Не трудно из теоремы Пифагора получить следующий факт: если H — проекция точки X на прямую AB, то $XA^2 - XB^2 = HA^2 - HB^2$. Проекции точки M на стороны AB и CD делят эти стороны на соответственно равные куски. Отсюда $MA^2 - MB^2 = MC^2 - MD^2$, откуда искомая величина равна $7^2+10^2-9^2=68$.

Решение. Проведём через точку M перпендикуляры к сторонам AB, BC, CD, DA четырёхугольника, точки K, L, P, N — соответственно основания этих перпендикуляров. Пусть $KB = KL = CP = k$, $BL = MK = AN = l$, $LC = MP = ND = m$, $PD = MN = AK = s$. Пусть $AM = x$.

Из теоремы Пифагора:
$l^2+k^2=7^2=49$,
$m^2+k^2=9^2=81$,
$m^2+s^2=10^2=100$,
$l^2+s^2=x^2$.

Отсюда $x^2=l^2+s^2=(l^2+k^2)-(m^2+k^2)+(m^2+s^2)=49-81+100=68$.

6. Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое делится на 7 и записывается четырьмя различными цифрами.

Ответ: 1029.

Решение. Наименьшее четырёхзначное число, кратное 7, — 1001. Следующие числа, кратные 7: 1008, 1015, 1022, 1029, …. Первое, у которого все цифры различны, — 1029.

7. Сколько пятизначных чисел, в записи каждого из которых есть хотя бы одна цифра «2»?

Ответ: 37512.

Решение. Количество 5-значных чисел равно 9 · 10 · 10 · 10 · 10 = 90000. Количество 5-значных чисел, в которых нет цифры «2», равно 8 · 9 · 9 · 9 · 9 = 52488. Искомое количество — 90000 – 52488 = 37512.

8. При каких m один из корней уравнения $x^2 + 111x - m^2 + 1 = 0$ будет равен нулю?

Ответ: −1, 1.

Указание. Один из корней равен нулю, если $-m^2 + 1 = 0$.

9. До сушки абрикос на 52 % состоит из воды. После сушки он будет состоять из воды лишь на 4 %. На сушку отправили 1000 кг абрикосов. На сколько кг уменьшится их вес после сушки?

Ответ: 500.

Решение. Масса сухой части абрикосов составляет 1000 · (100 – 52) = 480 кг. В сухих абрикосах 480 кг составляют 100 – 4 = 96 %, поэтому абрикосы после сушки будут весить 480 : 96 · 100 = 500 кг.

10. Найдите целые значения x, при которых функция

$$y = \sqrt{20 + 2\sqrt{91 + 6x - x^2}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{91 + 6x - x^2}}$$

принимает целые значения.

Ответ: –7, −6, –3, 2, 4, 9, 12, 13.

Решение 1. При искомых значениях x является квадратом целого числа

$$y^2 = \left(\sqrt{20 + 2\sqrt{91 + 6x - x^2}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{91 + 6x - x^2}}\right)^2 =$$
$$= 40 - 2\sqrt{\left(20 + 2\sqrt{91 + 6x - x^2}\right)\left(20 - 2\sqrt{91 + 6x - x^2}\right)} =$$
$$= 40 - 2\sqrt{400 - 4(91 + 6x - x^2)} = 40 - 4\sqrt{9 - 6x + x^2} =$$
$$= 40 - 4\sqrt{(x-3)^2} = 40 - 4|x - 3|.$$

Подходят квадраты 40 – 4 = 36, 40 – 4 · 6 = 16, 40 – 4 · 9 = 4, 40 – 4 · 10 = 0. Тогда $|x - 3|$ равно 1, 6, 9 или 10, что выполняется, если x равно –7, −6, –3, 2, 4, 9, 12, 13.

Решение 2. Во-первых, $91 + 6x - x^2 = (13 - x)(x + 7) \geq 0$, если $-7 \leq x \leq 13$.

Во-вторых, под корнями можно свернуть полные квадраты:

$$\sqrt{20 + 2\sqrt{91 + 6x - x^2}} = \sqrt{(13 - x) + (x + 7) + 2\sqrt{(13 - x)(x + 7)}} =$$
$$= \left|\sqrt{13 - x} + \sqrt{7 + x}\right| = \sqrt{13 - x} + \sqrt{7 + x}.$$

$$\sqrt{20 - 2\sqrt{91 + 6x - x^2}} = \sqrt{(13 - x) + (x + 7) - 2\sqrt{(13 - x)(x + 7)}} =$$

$$= \left|\sqrt{13 - x} - \sqrt{7 + x}\right| = \begin{cases} \sqrt{13 - x} - \sqrt{7 + x}, \text{при } 13 - x \geq 7 + x \\ \sqrt{7 + x} - \sqrt{13 - x}, \text{при } 13 - x < 7 + x \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{13 - x} - \sqrt{7 + x}, \text{при } -7 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{7 + x} - \sqrt{13 - x}, \text{при } 3 < x \leq 13 \end{cases}$$

Тогда данное выражение равно

$$\begin{cases} 2\sqrt{7 + x}, \text{при } -7 \leq x \leq 3 \\ 2\sqrt{13 - x}, \text{при } 3 < x \leq 13 \end{cases}$$

В указанных пределах значения целые, если x равно –7, −6, –3, 2, 4, 9, 12, 13.

11. Для каких натуральных чисел x найдётся такое натуральное число y, что выполнено $x^2 - y^2 = 65$?

Ответ: 9, 33.

Указание: числа $x - y$ и $x + y$ дают в произведении 65 = 13 · 5 = 1 · 65, далее достаточно рассмотреть все возможные комбинации множителей.

12. Числа x, y, z, u, v удовлетворяют условию

$$\begin{cases} x + y + z + u = 5, \\ y + z + u + v = 1, \\ z + u + v + x = 2, \\ u + v + x + y = 0, \\ v + x + y + z = 4. \end{cases}$$

Чему равно значение выражения $x + 2y + 3z + 4u + 5v$?

Ответ: −1.

Указание. Если сложить все уравнения, получится учетверенная сумма всех чисел. Решение системы: $x = 2,\ y = 1,\ z = 3,\ u = -1,\ v = -2$.

13. Точки M, N, K и P — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$. Найдите периметр четырехугольника $MNKP$, если сумма диагоналей AC и BD равна 20.

Ответ: 20.

Решение. Пусть $AC = a$, $BD = b$, $a + b = 20$. Отрезки MN и KP — средние линии треугольников ABC и CDA, значит, $MN = KP = a/2$. Аналогично $NK = MP = b/2$. Получаем: $MN + NK + KP + PM = a + b = 20$.

14. Отношение произведения двух чисел к их сумме квадратов равно 0,48. Чему равно отношение меньшего из них к большему?

Ответ: 0,75.

Указание. Из условия

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{48}{100} = \frac{12}{25} \Leftrightarrow 25xy = 12x^2 + 12y^2 \Leftrightarrow 12\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 25\frac{x}{y} + 12 = 0.$$

Осталось сделать замену и решить квадратное уравнение.

15. Майкл Фелпс за 20 мин проплывает против течения реки 1,2 км, а по течению за 25 мин на 2,7 км больше. Сколько км/ч составляет скорость Майкла Фелпса?

Ответ: 6,48.

Указание. Пусть v км/ч — скорость пловца, x км/ч — скорость реки. Из условия:

$$\begin{cases}(v-x)1/3 = 1{,}2\\(v+x)5/12 = 3{,}9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v - x = 3{,}6\\v + x = 9{,}36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v = 6{,}48\\x = 2{,}88\end{cases}$$

16. В равнобокой трапеции $ABCD$ на основании AD отмечена такая точка L, что BL — биссектриса угла B трапеции. Оказалось, что $BLDC$ — ромб. Найдите длину AD, если периметр трапеции равен 60.

Ответ: 24.

Указание: из условия $AB = BC = CD = DL = LA$.

17. Какие из формул задают линейную функцию, принимающую нецелое значение при любом целом значении аргумента?

(1) $y = x/19 - 1/4$,
(2) $y = 3x/26 + 4/39$,
(3) $y = 2{,}3x + 0{,}4$,
(4) $y = 9x/10 - 1/5$,
(5) $y = 23{,}5x + 0{,}3$.

Ответ: 1, 2, 5.

18. Пете на день рождения подарили новый электролобзик с функцией подсчёта длины сделанных пропилов. Чтобы опробовать подарок, Петя взял квадратный кусок фанеры со стороной 60 см и распилил его на двух видов: со стороной 10 см и со

стороной 30 см. Сколько всего получилось квадратов, если электролобзик показывает общую длину пропилов 2 м 40 см?

Ответ: 12.

Указание. Если у Пети получилось x маленьких квадратов и y больших квадратов, то с точки зрения длины периметров $40x + 120y = 240 \cdot 2 + 240$, с точки зрения площади куска $100x + 900y = 3600$.