Блок 3. Признаки делимости

Задачи интернет-карусели (2020)

1. Лёня убрал из записи числа 987654321 две цифры. Получилось число, кратное 18. Чему равна сумма этих двух цифр?
2. Сколько четырёхзначных чисел $*27*$ (звездочками заменены две цифры), которые кратны 15?
3. Замените в записи числа $12*34*56$ звёздочки цифрами, чтобы полученное число было кратно 99.
4. Все натуральные числа от 1 до 30 записали подряд: 12345678910…2930. Какой остаток даёт полученное многозначное число при делении на 9?
5. Замените в записи числа $12*34*56$ звёздочки цифрами, чтобы полученное число при делении на 33 давало остаток 17.
6. Выписывают в ряд двузначные числа 10111213… до некоторого двухзначного числа n, пока полученное многозначное число не начнёт делиться на 99. Чему равно n?
7. Найдите число вида $*10*$ (звездочками заменены две цифры), которое кратно 12.
8. Тимофей записал некоторое натуральное число N, нашёл сумму его цифр, а затем к числу N прибавил эту сумму. Получил 2020. Чему равно N?
9. Найдите число вида $*15*$ (звездочками заменены две цифры), которое кратно 45.
10. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры на доске. Первым ходит Петя, и он пишет ненулевую цифру. Затем они по очереди приписывают по одной цифре справа, пока не образуется 100-значное число. Вася выигрывает, если получившееся число даёт остаток 4 при делении на 11, в противном случае выигрывает Петя. Петя придумал, как наверняка выигрывать. С какой цифры он начнет?
11. У Васи есть 5 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Он хочет составить 5-значное число, кратное 4. Сколько таких чисел можно составить?
12. Вася две поменял местами две соседние цифры в записи числа 84643991 и полученное число смог поделить на 7 без остатка. Какой результат деления получил Вася?
13. У Васи есть 6 карточек с цифрами 2, 3, 4, 5, 6, 7. Он хочет составить 6-значное число, кратное 25. Сколько таких чисел можно составить?
14. У Васи есть 8 карточек с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Он хочет составить 7-значное число, кратное 27. Какую цифру Вася не будет использовать?
15. У Васи есть 7 карточек с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Он хочет составить 7-значное число, кратное 11. Сколько таких чисел можно составить?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2019-2020 учебный год

Блок 3. Признаки делимости

Задачи интернет-карусели (2020)

1. Лёня убрал из записи числа 987654321 две цифры. Получилось число, кратное 18. Чему равна сумма этих двух цифр?
2. Сколько четырёхзначных чисел $*27*$ (звездочками заменены две цифры), которые кратны 15?
3. Замените в записи числа $12*34*56$ звёздочки цифрами, чтобы полученное число было кратно 99.
4. Все натуральные числа от 1 до 30 записали подряд: 12345678910…2930. Какой остаток даёт полученное многозначное число при делении на 9?
5. Замените в записи числа $12*34*56$ звёздочки цифрами, чтобы полученное число при делении на 33 давало остаток 17.
6. Выписывают в ряд двузначные числа 10111213… до некоторого двухзначного числа n, пока полученное многозначное число не начнёт делиться на 99. Чему равно n?
7. Найдите число вида $*10*$ (звездочками заменены две цифры), которое кратно 12.
8. Тимофей записал некоторое натуральное число N, нашёл сумму его цифр, а затем к числу N прибавил эту сумму. Получил 2020. Чему равно N?
9. Найдите число вида $*15*$ (звездочками заменены две цифры), которое кратно 45.
10. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры на доске. Первым ходит Петя, и он пишет ненулевую цифру. Затем они по очереди приписывают по одной цифре справа, пока не образуется 100-значное число. Вася выигрывает, если получившееся число даёт остаток 4 при делении на 11, в противном случае выигрывает Петя. Петя придумал, как наверняка выигрывать. С какой цифры он начнет?
11. У Васи есть 5 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Он хочет составить 5-значное число, кратное 4. Сколько таких чисел можно составить?
12. Вася две поменял местами две соседние цифры в записи числа 84643991 и полученное число смог поделить на 7 без остатка. Какой результат деления получил Вася?
13. У Васи есть 6 карточек с цифрами 2, 3, 4, 5, 6, 7. Он хочет составить 6-значное число, кратное 25. Сколько таких чисел можно составить?
14. У Васи есть 8 карточек с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Он хочет составить 7-значное число, кратное 27. Какую цифру Вася не будет использовать?
15. У Васи есть 7 карточек с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Он хочет составить 7-значное число, кратное 11. Сколько таких чисел можно составить?

karusel.desc.ru ~ 55 ~

Блок 3. Признаки делимости

Задачи интернет-карусели (2020). Указания и решения

- Решения часто опираются на факты, разобранные в подготовительном занятии.
- Обратите внимание, что в решениях и комментариях к задачам № 4-5 и № 6 сформулированы уточнения принципов равноостаточности. В первом случае речь идёт о факте про делимость на 99, во втором — уточнение про принцип равноостаточности при делимости на 9.
- Решение задач № 11, № 13, № 15 требует комбинаторных умений.

1. Лёня убрал из записи числа 987654321 две цифры. Получилось число, кратное 18. Чему равна сумма этих двух цифр?

   Ответ: 9.

   Решение. Число делится на 18, значит, оно четное и делится на 9. Последнюю цифру (единицу) надо убрать, иначе оно будет нечётным. Сумма оставшихся цифр равна 44. Чтобы сумма цифр делилась на 9, нужно вычеркнуть 8. Сумма цифр, которые убрал Лёня, равна 1 + 8 = 9.

2. Сколько четырёхзначных чисел ∗27∗ (звездочками заменены две цифры), которые кратны 15?

   Ответ: 6.

   Решение. Чтобы число делилось на 15, оно должно делиться и на 3, и на 5. То есть последняя цифра будет 0 или 5. Сумма цифр с нулем равна 2 + 7 + 0 = 9, с пятеркой — 2 + 7 + 5 = 14. Значит, подойдут 1275, 4275, 7275, 3270, 6270, 9270.

3. Замените в записи числа 12∗34∗56 звёздочки цифрами, чтобы полученное число было кратно 99.

   Ответ: 12834756.

   Решение. Пусть $\overline{12a34b56}$ — искомое число.

   (1) Из делимости числа на 9 сумма $1+2+a+3+4+b+5+6=21+a+b$ кратна 9. Так как $21 \le 21+a+b \le 39$, то $21+a+b=27$ или $21+a+b=36$, то есть $a+b=6$ или $a+b=15$.

   (2) Из делимости на 11 разность $(6+b+3+2)-(5+4+a+1)=1+b-a$ кратна 11. Так как $-8 \le 1+b-a \le 10$, то $1+b-a=0$, то есть $a=b+1$.

   Если $a=b+1$, то искомые цифры разной чётности, откуда их сумма нечётна. Значит, $a=b+1$ и $a+b=15$, то есть $a=8,\ b=7$. Искомое число 12834756.

   Комментарий. Из доказательства *принципа № 1 равноостаточности* при делении на 11 следует, что указанная сумма двузначных чисел даёт тот же остаток при делении на 99, что и само число. Покажем, как при решении данной задачи это удобно использовать.

   Для делимости на 99 необходимо, чтобы сумма $\overline{12}+\overline{a3}+\overline{4b}+\overline{56}$ была кратна 99. Она равна $10a+b+111$. Так как $111 \le 10a+b+111 \le 210$, то $10a+b+111=198,\ 10a+b=87,\ a=8,\ b=7$.

4. Все натуральные числа от 1 до 30 записали подряд: 12345678910…2930. Какой остаток даёт полученное многозначное число при делении на 9?

   Ответ: 6.

   Решение 1. Посчитаем сумму цифр указанного числа.

   Сложим «единицы» выписанных чисел: 0 + 1 + 2 + 3 + … + 9 = 45. Таких наборов 3 (по одному в каждом десятке). Сложим цифры в разряде десятков выписанных чисел: 1 · 10 + 2 · 10 + 3 = 33. Значит, сумма всех цифр равна 45 · 3 + 33 = 168.

   Эта сумма делится на 3, но не делится на 9. Значит, и само число делится на 3, но не делится на 9, что невозможно для квадрата целого числа.

   Комментарий. Из принципа равноостаточности при делении на 9 следует, что если между любыми двумя соседними цифрами в записи числа поставить знаки «+», то остаток при делении на 9 не изменится. Но также остаток не изменится, если в сумме цифр убрать знаки сложения, превратив сумму в запись числа. Вывод: если в записи числа между *некоторыми* соседними цифрами поставить знак «+», то полученная сумма даёт тот же остаток при делении на 9, что и само число.

   Решение 2. Воспользуемся принципом, изложенным выше в комментарии.

   Данное число дает такой же остаток при делении на 9, что и сумма чисел от 1 до 30, равная 1 + 2 + … + 30 = 465. Этот остаток тот же, что у числа 4 + 6 + 5 = 15, то есть равен 6.

5. Замените в записи числа 12∗34∗56 звёздочки цифрами, чтобы полученное число при делении на 33 давало остаток 17.

   Ответ: 12034556, 12334856 или 12734156

   Решение. Пусть $\overline{12a34b56}$ — искомое число. Если оно при делении на 33 даёт остаток 17, то остаток при делении на 3 равен остатку числа 17, то есть равен 2. Остаток при делении на 11 равен остатку числа 17, то есть равен 6.

   (1) Из принципа равноостаточности при делении на 3 следует, что сумма $1+2+a+3+4+b+5+6=21+a+b$ должна давать остаток 2 при делении на 3. Так как $21 \le 21+a+b \le 39$, то $21+a+b$ равно 23, 26, 29, 32, 35 или 38, откуда сумма $a+b$ равна 2, 5, 8, 11, 14 или 17.

(2) Из принципа равноостаточности при делении на 11 следует, что разность $(6+b+3+2)-(5+4+a+1)=1+b-a$ должна давать остаток 6 при делении на 11. Так как $-8 \le 1+b-a \le 10$, то $1+b-a=-5$ или $1+b-a=6$. Получаем: $a=b+6, a=b-5$.

Если $a=b+6$, то искомые цифры одной чётности, откуда их сумма чётна. Если $a=b-5$, то искомые цифры разной чётности, откуда их сумма нечётна. Получаем 6 случаев:

1) $a+b=2, a=b+6$ — нет решений;
2) $a+b=5, a=b-5$ — здесь $a=0,\ b=5$;
3) $a+b=8, a=b+6$ — здесь $a=7,\ b=1$;
4) $a+b=11, a=b-5$ — здесь $a=3,\ b=8$;
5) $a+b=14, a=b+6$ — нет решений;
6) $a+b=17, a=b-5$ — нет решений.

Искомое число 12$\underline{0}$34$\underline{5}$56, 12$\underline{3}$34$\underline{8}$56 или 12$\underline{7}$34$\underline{1}$56.

Комментарий. Из доказательства *принципа № 1 равноостаточности* при делении на 11 следует, что указанная сумма двузначных чисел даёт тот же остаток при делении на 33, что и само число. Покажем, как при решении данной задачи это удобно использовать.

Для делимости на 33 необходимо, чтобы $\overline{12}+\overline{a3}+\overline{4b}+\overline{56}=10a+b+111$ при делении на 33 давало остаток 17. Так как $111 \le 10a+b+111 \le 210$, то сумма равна 116, 149 или 182. Отсюда $10a+b$ равно 5, 38 или 71, то есть пара $(a; b)$ равна (0; 5), (3; 8) или (7; 1).

6. Выписывают в ряд двузначные числа 10111213… до некоторого двухзначного числа n, пока полученное многозначное число не начнёт делиться на 99. Чему равно n?

Ответ: 89.

Решение. Из доказательства принципа равноостаточности № 1 при делении на 11 следует свойство делимости на 99: если запись числа с конца разбить на двузначные числа, то их сумма должна делиться на 99. Значит, сумма от 10 до n должна быть кратна 99. Она равна $(10+n)(n-9)/2$, значит $(10+n)(n-9)$ кратно 99. Так как разность между множителями равна 19, то оба не могут делиться на 3, то есть один из множителей кратен 11 и один из них кратен 9.

Если один кратен и 9, и 11, то n не менее 89.

Если первый делится на 11, то n равен 12, 23, 34, 45, …. Впервые второй множитель кратен 9 при $n=45$.

Если второй множитель делится на 11, то n равно 20, 31, 42, 53, 64, …. Впервые первый множитель кратен 9 при $n=53$.

Таким образом, искомое число равно $n=45$.

7. Найдите число вида $*10*$ (звездочками заменены две цифры), которое кратно 12.

Ответ: 1104, 2100, 3108, 4104, 5100, 6108, 7104, 8100, 9108.

Решение. Чтобы число делилось на 12, оно должно делиться на 3 и на 4. То есть две последние цифры образуют число 00, 04 или 08, а сумма цифр делится на 3.

(1) Если оканчивается на 00, то сумма последних 3 цифр равна 1 + 0 + 0 = 1. Тогда первая цифра может быть 2, 5 или 8.

(2) Если оканчивается на 04, то сумма последних 3 цифр равна 1 + 0 + 4 = 5. Тогда первая цифра может быть 1, 4 или 7.

(3) Если оканчивается на 8, то сумма последних 3 цифр равна 1 + 0 + 8 = 9. Тогда первая цифра может быть 0, 3, 6 или 9 (первый вариант не подходит, так как число не может начинаться с нуля).

В итоге получаем 9 чисел, указанных в ответе.

8. Тимофей записал некоторое натуральное число N, нашёл сумму его цифр, а затем к числу N прибавил эту сумму. Получил 2020. Чему равно N?

Ответ: 2009.

Решение. Так как $N \le 2019$, сумма его цифр не более чем 1 + 9 + 9 + 9 = 28. Значит, $2020-28=1992 \le N \le 2019$. Число N даёт остаток 2. Значит, N равно 2000, 2009 или 2018. Подходит только 2009.

9. Найдите число вида $*15*$ (звездочками заменены две цифры), которое кратно 45.

Ответ: 3150 или 7155.

Решение. Число делится на 45 тогда и только тогда, когда оно делится на 9 и на 5. Чтобы число делилось на 5, его последняя цифра должна быть равна 0 или 5. Чтобы оно делилось на 9, сумма его цифр должна делиться на 9.

(1) Если число вида $*150$, то для делимости суммы цифр на 9 нужно звёздочку заменить цифрой 3.

(2) Если число вида $*155$, то для делимости суммы цифр на 9 нужно звёздочку заменить цифрой 7.

Значит, возможны два варианта: 3150 и 7155.

10. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры на доске. Первым ходит Петя, и он пишет ненулевую цифру. Затем они по очереди приписывают по одной цифре справа, пока не образуется 100-значное число. Вася выигрывает, если

получившееся число даёт остаток 4 при делении на 11, в противном случае выигрывает Петя. Петя придумал, как наверняка выигрывать. С какой цифры он начнет?

Ответ: 6.

Решение. Покажем, что (1) если Петя начнёт с цифры, отличной от 6, то Вася может гарантированно выиграть, (2) если Петя начнёт с цифры 6, то он сам может гарантированно выиграть.

(1) Если Петя поставит первой цифру, отличную от 6, то Вася может сделать 2-значное число, дающее при делении на 11 остаток 4: 15, 26, 37, 48, 59, 70, 81 или 92. Далее Вася будет приписывать ту же цифру, которую предыдущим ходом написал Петя. Тогда согласно принципу равноостаточности № 1 при делении на 11 (см. подготовительное занятие) полученное 100-значное число будет давать тот же остаток, что и сумма 50 двузначных чисел, из которых первое даёт остаток 4, остальные кратны 11. Такая сумма даёт при делении на 11 остаток 4.

(2) Если Петя первой поставит цифру 6, то далее может каждым своим ходом приписывать ту же цифру, которую предыдущим ходом написал Вася. Последним ходом Вася может поставить любую цифру. Получившееся число вида $\overline{6a_1a_1a_2a_2 \dots a_{49}a_{49}b}$ согласно принципу № 2 равноостаточности при делении на 11 имеет тот же остаток, что и знакочередующаяся сумма, равная $b-6$. Заметим, что $-6 \le b-6 \le 3$ — все эти числа при делении на 11 не дают остаток 4. Поэтому Вася не сможет выиграть.

11. У Васи есть 5 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Он хочет составить 5-значное число, кратное 4. Сколько таких чисел можно составить?

Ответ: 24.

Указание. Последняя цифра — чётная, 2 или 4. По свойству делимости на 4 последние 2 цифры составляют число, кратное 4. Значит, это сочетания 12, 32, 52, 24. В каждом из этих случаев первые 3 цифры можно поставить 3! = 6 способами. Итого 4 · 6 = 24 вариантов.

12. Вася две поменял местами две соседние цифры в записи числа 84643991 и полученное число смог поделить на 7 без остатка. Какой результат деления получил Вася?

Ответ: 12090713.

Решение. Не трудно проверить, что из чисел 4<u>86</u>43991, 8<u>64</u>43991, 84<u>46</u>3991, 846<u>34</u>991, 8464<u>93</u>91, 846439<u>19</u> только одно делится на 7 — это число 846<u>34</u>991.

13. У Васи есть 6 карточек с цифрами 2, 3, 4, 5, 6, 7. Он хочет составить 6-значное число, кратное 25. Сколько таких чисел можно составить?

Ответ: 48.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2019-2020 учебный год

Указание. Последняя цифра — 5. По свойству делимости на 25 последние 2 цифры составляют число, кратное 25, то есть 25 или 75. В каждом из этих случаев первые 4 цифры можно поставить 4! = 24 способами. Итого 2 · 24 = 48 вариантов.

14. У Васи есть 8 карточек с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Он хочет составить 7-значное число, кратное 27. Какую цифру Вася не будет использовать?

Ответ: 1.

Решение. Если число делится на 27, то оно делится на 9, поэтому сумма его цифр должна быть кратной 9. Сумма данных цифр 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28, для делимости на 9 можно убрать только цифру 1.

Комментарий. Числа из оставшихся цифр, делящиеся на 27, существуют. Например 5463720.

15. У Васи есть 7 карточек с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Он хочет составить 7-значное число, кратное 11. Сколько таких чисел можно составить?

Ответ: 288.

Решение. Рассмотрим разность между суммами цифр на нечётных и чётных местах. С одной стороны, она не более $(6+5+4+3)-(2+1+0)=15$, не менее $(0+1+2+3)-(4+5+6)=-9$. С другой стороны, она должна делиться на 11. Значит, она равна 0 или 11.

Так как сумма всех цифр равна 21, она нечётна. Значит, указанная разность не равна нулю.

Разность равна 11, если сумма 4 цифр равна 16, а трех остальных — 5. Три из данных цифр могут дать такую сумму 2 способами: 5 = 0 + 1 + 4 = 0 + 2 + 3. В каждом из них будет $3! \cdot 4! = (3\cdot2\cdot1)\cdot(4\cdot3\cdot2\cdot1) = 144$ вариантов.

Всего 2 · 144 = 288 чисел.