

Блок 2. Геометрия: многоугольники

Задачи интернет-карусели (2020)

1. В равнобокой трапеции угол при основании равен 60° , а основания равны 6 и 10. Чему равен периметр трапеции?
2. Из вершины параллелограмма провели две высоты параллелограмма. Их длина не менее полупериметра параллелограмма. Тогда параллелограмм (1) является квадратом, (2) является ромбом, (3) является прямоугольником.
Выберите номер пункта, при котором утверждение является верным.
3. В трапеции, длины сторон которой равны 3, 8, 13, 21, один из углов в 2 раза больше противоположного. Чему равна длина меньшего основания трапеции?
4. Высота AH трапеции $ABCD$ делит боковую сторону BC пополам, $AD = 2AH = 4AB$. Сколько градусов составляет угол между боковыми сторонами трапеции?
5. Сумма разность величин углов A и B параллелограмма $ABCD$ равна величине угла D . Сколько градусов составляет угол C параллелограмма?
6. Какие из данных утверждений являются верными?
 - (1) В ромбе напротив большей из диагоналей лежит больший угол ромба.
 - (2) Высота AH треугольника ABC образует со сторонами AB и AC углы 45° и 60° . Тогда BC — наибольшая из сторон треугольника.
 - (3) В трапеции сумма длин боковых сторон больше разности длин оснований.
7. Из вершины правильного многоугольника провели две кратчайшие диагонали. Угол между ними оказался равен 144° . Сколько углов могло быть в таком многоугольнике?
8. В выпуклом многоугольнике все углы выражаются целым числом градусов. Какое наибольшее количество углов может быть в таком многоугольнике?
9. Какие из данных утверждений являются верными?
 - (1) Если в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC — биссектриса угла A , диагональ BD — биссектриса угла B , то $ABCD$ — ромб.
 - (2) Если в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC — биссектриса угла A и биссектриса угла C , то диагонали AC и BD перпендикулярны.
 - (3) Если в трапеции $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются на основании CD , то сумма длин боковых сторон равна длине одного из оснований.
10. Какое наибольшее число углов может иметь выпуклый многоугольник, у которого величины углов различны и каждый угол кратен 5 градусам?

11. Сколькими способами можно в правильном семиугольнике выбрать такие 3 вершины, что они образуют равнобедренный треугольник?
12. Лаборатория имеет форму правильного шестиугольника со стороной 4 м. В углах лаборатории установили по прибору, определяющему количество тараканов на расстоянии, не превышающем 4 метра. Суммарно 6 приборов показывают 8 тараканов. Сколько их может быть на самом деле?
13. Сколькими способами можно в правильном 27-угольнике выбрать такие 3 вершины, что они образуют равнобедренный треугольник?
14. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы при вершинах равны. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $EF = 1$. Найдите сумму длин сторон DE и AF .
15. Сумма оснований трапеции равна 10, а отрезок, соединяющий середины оснований равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите длину меньшей боковой стороны трапеции.

Блок 2. Геометрия: многоугольники

Задачи интернет-карусели (2020). Указания и решения

1. В равнобокой трапеции угол при основании равен 60° , а основания равны 6 и 10. Чему равен периметр трапеции?

Ответ: 24.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями $AB = 6$, $CD = 10$. Высоты AE и BF делят трапецию на два равных треугольника ADE и BCF (они прямоугольные, $AE = BF$, $AD = BC$) и прямоугольник $ABFE$.

Тогда $DE = CF$, $AB = EF$. Значит, $DE = (CD - AB) : 2 = (10 - 6) : 2 = 2$.

Треугольник ADE — прямоугольный с углом D , равным 60° . Значит, $AD = 2DE = 4$.

Так как $AD = BC$ то периметр равен $AB + BC + CD + DA = 6 + 4 + 10 + 4 = 24$.

2. Из вершины параллелограмма провели две высоты параллелограмма. Их длина не менее полупериметра параллелограмма. Тогда параллелограмм (1) является квадратом, (2) является ромбом, (3) является прямоугольником.

Выберите номер пункта, при котором утверждение является верным.

Ответ: 3.

Решение. Если AE и AF — указанные высоты параллелограмма $ABCD$, опущенные соответственно на стороны BC и CD , то $AE \leq AB$, $AF \leq AD$ (из соотношения между перпендикуляром и наклонной).

Так как $AB = CD$, $AD = BC$, то $2(AE + AF) \leq 2AB + 2AD = P_{ABCD}$, $AE + AF \leq P_{ABCD}/2$. Из условия $AE + AF \geq P_{ABCD}/2$. Значит, $AE + AF = P_{ABCD}/2$.

Тогда неравенства $AE \leq AB$, $AF \leq AD$ должны были быть равенствами $AE = AB$, $AF = AD$. Значит, AE совпадает с AB , AF совпадает с AD , то есть, углы параллелограмма прямые, то есть, $ABCD$ — прямоугольник.

Из указанных вариантов вывод (3) верен, вывод (1) про квадрат не верен (условию удовлетворяют не только квадраты), вывод (2) про ромб не верен (он не удовлетворяет данному условию).

3. В трапеции, длины сторон которой равны 3, 8, 13, 21, один из углов в 2 раза больше противоположного. Чему равна длина меньшего основания трапеции?

Ответ: 13.

Указание. Если основания трапеции a и b , один из углов в 2 раза больше противоположного, то боковая сторона, прилегающая к этому углу, равна $a - b$.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AB и CD , в которой $\angle D = 2\angle B$. Проведем биссектрису угла D , пусть она пересекает AB в точке E . Так как параллельны BE и CD , $\angle CDE = \angle CBE$, то $BCDE$ — параллелограмм, $CD = BE$.

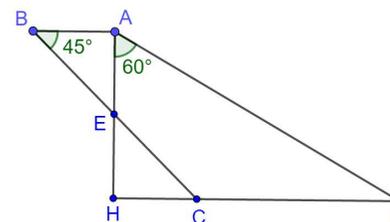
Из параллельности AB и CD следует, что $\angle AED = \angle EDC$, из условия $\angle EDC = \angle ADE$, поэтому $\angle AED = \angle ADE$, треугольник ADE — равнобедренный ($AD = AE$).

Вывод: $AB = AE + EB = AD + CD$. Из указанных длин только одно число равно сумме двух других: $21 = 13 + 8$. Значит, длина большего основания 21, а меньшего — 8 или 13. Оба варианта возможны.

4. Высота AH трапеции $ABCD$ делит боковую сторону BC пополам, $AD = 2AH = 4AB$. Сколько градусов составляет угол между боковыми сторонами трапеции?

Ответ: 15.

Указание. Постарайтесь нарисовать чертёж, удовлетворяющий условию.



Решение. Пусть высота AH пересекает сторону BC в точке E . Из равенства $BE = CE$ и параллельности AB и CH следует равенство треугольников ABE и HCE . Тогда из условия $CE = AH/2 = AB = CH$, откуда $\angle BCH = 45^\circ$.

Треугольник ADH — прямоугольный, $2AH = AD$, откуда $\angle ADH = 30^\circ$.

Значит, в треугольнике, образованном прямыми BC , AD и CD два угла равны $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ и 30° , то есть угол между боковыми сторонами трапеции равен $180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

5. Сумма разность величин углов A и B параллелограмма $ABCD$ равна величине угла D . Сколько градусов составляет угол C параллелограмма?

Ответ: 120.

Решение. Из условия $\angle A - \angle B = \angle D$. Из свойств углов параллелограмма $\angle C = \angle A$, $\angle B = \angle D$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$. Значит, $\angle C = \angle A = \angle B + \angle D = 2\angle B = 2(180^\circ - \angle C)$, откуда $3\angle C = 360^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

6. Какие из данных утверждений являются верными?

(1) В ромбе напротив большей из диагоналей лежит больший угол ромба.

(2) Высота AH треугольника ABC образует со сторонами AB и AC углы 45° и 60° . Тогда BC — наибольшая из сторон треугольника.

(3) В трапеции сумма длин боковых сторон больше разности длин оснований.

Ответ: 1 и 3.

Решение. Утверждение (1) является верным. Пусть точка O — пересечение диагоналей ромба $ABCD$, $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$. В прямоугольном треугольнике ABO катеты — половины диагоналей, углы при вершинах A и B равны α и β . Если $AC > BD$, то $AO > BO$. Тогда в треугольнике ABO будет $\alpha > \beta$, откуда $\angle A > \angle B$.

Утверждение (2) не верно. В тупоугольном треугольнике с углами $\angle A = 15^\circ$, $\angle B = 135^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ высота AH падает на продолжение стороны BC . Не трудно проверить, что треугольник удовлетворяет условию. В нем сторона BC — наименьшая, так как лежит напротив наименьшего из углов.

Утверждение (3) является верным. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AB и CD , $AB < CD$; точка E на CD такова, что $AB = CE$. Тогда $ABCE$ — параллелограмм. В треугольнике ADE стороны AD и AE равны боковым сторонам трапеции, сторона DE — разности оснований. Из неравенства треугольника следует требуемое.

7. Из вершины правильного многоугольника провели две кратчайшие диагонали. Угол между ними оказался равен 144° . Сколько углов могло быть в таком многоугольнике?

Ответ: 20.

Решение. Величина угла правильного n -угольника равна $180^\circ(n-2)/n$. Кратчайшая диагональ отсекает равнобедренный треугольник с углами при основании, равными $(180^\circ - 180^\circ(n-2)/n) : 2 = 180^\circ/n$. Тогда угол между указанными кратчайшими диагоналями равен $180^\circ(n-2)/n - 2 \cdot 180^\circ/n = 180^\circ(n-4)/n = 144^\circ$. Тогда $180^\circ(n-4) = 144^\circ n$, откуда $n = 20$.

8. В выпуклом многоугольнике все углы выражаются целым числом градусов. Какое наибольшее количество углов может быть в таком многоугольнике?

Ответ: 360.

Решение. Как известно, сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному у каждого угла, равна 360° . Если величины внутренних углов — целые, то внешний угол не менее 1° . Значит, внешних углов не более 360 штук, то есть у многоугольника не менее 360 углов. Не трудно понять, что многоугольник, все углы которого равны 359° , существует.

9. Какие из данных утверждений являются верными?

(1) Если в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC — биссектриса угла A , диагональ BD — биссектриса угла B , то $ABCD$ — ромб.

(2) Если в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC — биссектриса угла A и биссектриса угла C , то диагонали AC и BD перпендикулярны.

(3) Если в трапеции $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются на основании CD , то сумма длин боковых сторон равна длине одного из оснований.

Ответ: 2 и 3

Указание. Утверждение (1) не верно. Например, в любой равнобокой трапеции $ABCD$, в которой основание CD равно боковым сторонам, диагонали являются биссектрисами углов A и B .

Утверждение (2) является верным. Треугольники ACB и ACD равны (по стороне AC и прилежащим к ней углам). Тогда $AB = AD$. В равнобедренном треугольнике ABD биссектриса угла A является высотой, откуда $AC \perp BD$.

Утверждение (3) является верным. Если указанные биссектрисы пересекаются на основании CD в точке E , то $BC = CE$, $AD = DE$, откуда $CD = CE + DE = BC + AD$.

10. Какое наибольшее число углов может иметь выпуклый многоугольник, у которого величины углов различны и каждый угол кратен 5 градусам?

Ответ: 11.

Решение. Как известно, сумма внешних углов выпуклого n -угольника, взятых по одному у каждого угла, равна 360° . Если величины внутренних углов различны и кратны 5° , то внешние углы тоже различны и кратны 5° . Тогда должно быть выполнено $5^\circ + 2 \cdot 5^\circ + 3 \cdot 5^\circ + \dots + n \cdot 5^\circ \leq 360^\circ$, откуда $n(n+1) \leq 144$, $n \leq 11$.

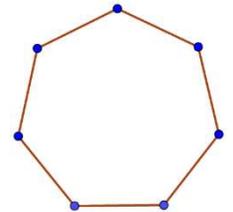
Указанный 11-угольник существует, его внешние углы равны 5° , $2 \cdot 5^\circ$, $3 \cdot 5^\circ$, ..., $10 \cdot 5^\circ$ и $30^\circ + 11 \cdot 5^\circ$.

11. Сколькими способами можно в правильном семиугольнике выбрать такие 3 вершины, что они образуют равнобедренный треугольник?

Ответ: 21

Решение. Заметим, для любой пары вершин A и B есть ровно одна такая вершина C , что $AC = BC$ (то есть треугольник ABC — равнобедренный). Поэтому треугольников столько же, сколько пар вершин, а именно $7 \cdot 6 : 2 = 21$.

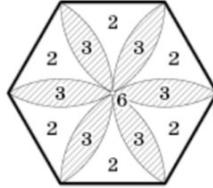
Комментарий. Сравните с решением задачи № 13.



12. Лаборатория имеет форму правильного шестиугольника со стороной 4 м. В углах лаборатории установили по прибору, определяющему количество тараканов на расстоянии, не превышающем 4 метра. Суммарно 6 приборов показывают 8 тараканов. Сколько их может быть на самом деле?

Ответ: 2, 3, 4.

Решение. На картинке справа указаны области лаборатории и количество приборов, которые будет видеть таракан в данной области. Таким образом, каждый таракан может вносить в показания приборов 2, 3 или 6. Число 8 можно представить как сумму 2, 3 или 4 таких чисел $(6 + 2, 3 + 3 + 2, 2 + 2 + 2 + 2)$, поэтому количество тараканов равно 2, 3 или 4.

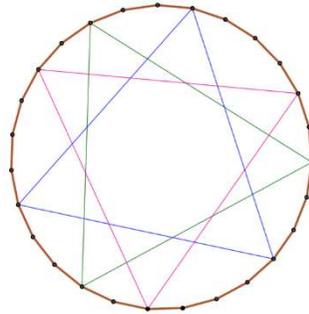


13. Сколькими способами можно в правильном 27-угольнике выбрать такие 3 вершины, что они образуют равнобедренный треугольник?

Ответ: 333.

Решение. Заметим, для любой пары вершин A и B есть ровно одна такая вершина C , что $AC = BC$ (то есть треугольник ABC — равнобедренный). Поэтому треугольников столько же, сколько пар вершин, а именно $27 \cdot 26 : 2$.

Заметим, что существуют 9 троек вершин, являющихся вершинами равностороннего треугольника. Примеры таких треугольников показаны на рисунке справа. Каждый такой треугольник при подсчёте учтён трижды. Значит, количество треугольников — $27 \cdot 26 : 2 - 2 \cdot 9 = 333$.



Комментарий. Сравните с решением задачи № 11.

14. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы при вершинах равны. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $EF = 1$. Найдите сумму длин сторон DE и AF .

Ответ: 14.

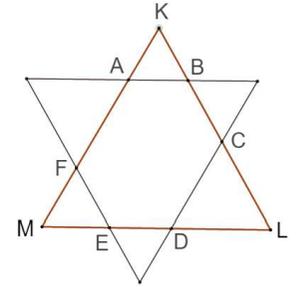
Решение. Сумма углов выпуклого шестиугольника равна $180^\circ(6 - 2) = 720^\circ$, значит каждый угол данного шестиугольника равен $720^\circ : 6 = 120^\circ$.

Обозначим пересечения некоторых прямых, как показано на рисунке справа. Тогда треугольники AKB , CLD , EMF и KLM — равносторонние.

Тогда $KL = KB + BC + CL = AB + BC + CD = 12$.

Получаем:

$$DE + AF = KM + KM - AK - DL - ME - MF = \\ = KL + KL - AB - CD - 2EF = 12 + 12 - 3 - 5 - 2 \cdot 1 = 14.$$



15. Сумма оснований трапеции равна 10, а отрезок, соединяющий середины оснований равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите длину меньшей боковой стороны трапеции.

Ответ: 3.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, точки E и F — соответственно середины оснований AB и CD , $AB > CD$. Отметим на основании AB такие точки P и Q , что $AP = BQ = CF = DF$.

Тогда $ADFP$ и $BCFQ$ — параллелограммы, $\angle EQF = \angle EBC = 30^\circ$, $\angle DAE = \angle FPE = 60^\circ$. Треугольник PQF — прямоугольный с углом 60° , в нём $PQ = 2FP$, медиана EF равна половине PQ .

Получаем, что $PQ = 2EF = 2 \cdot 3 = 6$, $AD = PF = PQ/2 = 6 : 2 = 3$. Остаётся заметить, что в треугольнике PQF выполнено $PF < QF$, откуда $AD < BC$.