Блок 7. Геометрия. Подсчёт углов

Задания Интернет-карусели (2020)

1. Дан треугольник ABC, у которого $AB = 2$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. На стороне AC отмечена точка D, $AD = 1$. Найдите величину угла DBC.

2. На сторонах BC, AB и AC равностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки D, E и F так, что $DE \perp AB$, $DF \perp AC$. Найдите $AE + AF$, если $BC = 24$.

3. Какие из указанных утверждений являются верными?

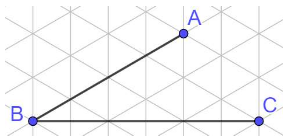
   (1) Если треугольники ABC и XYZ равны, то равны их медианы AA_1 и XX_1.

   (2) Если равны медианы AA_1 и XX_1 треугольников ABC и XYZ, то треугольники ABC и XYZ равны.

   (3) Если в треугольниках ABC и XYZ равны медианы AA_1 и XX_1, равны стороны AB и XY, равны стороны BC и YZ, то треугольники ABC и XYZ равны.

4. На катете BC прямоугольного треугольника ABC с углом B, равным 15 градусов, отметили такую точку D, что $BD = 2AC$. Найдите величину угла CAD.

5. На рисунке показано, что плоскость разделена прямыми на равные равносторонние треугольники. Точки A, B и C — вершины таких треугольников, как показано на рисунке. Сколько градусов составляет величина угла ABC?



6. Дан треугольник ABC, $\angle B = 80°$. На стороне AC отмечена точка D, $AD = 1$, $BD = 2$, $\angle BDC = 120°$. Найдите величину угла DBC.

7. Точка I — пересечение биссектрис всех трёх углов треугольника ABC. Какие из указанных утверждений являются верными?

   (1) Если треугольник ABC равнобедренный, то среди отрезков AI, BI, CI найдутся два равных.

   (2) Если углы AIB, BIC, CIA равны, то треугольник ABC — равносторонний.

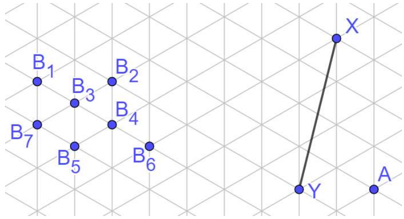
   (3) Если угол AIB — острый, то треугольник ABC — прямоугольный.

8. Точка M — середина гипотенузы прямоугольного треугольника ABC. Найдите величину угла A треугольника ABC, если $\angle AMC = \angle BMC + 44°$?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

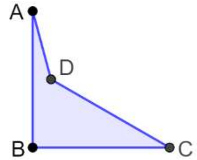
9. На сторонах AB и AC есть соответственно такие точки D и E, что $AE = ED = BD$, $CE = EB$. Сколько градусов составляет величина угла A треугольника ABC?

10. На рисунке показано, что плоскость разделена прямыми на ячейки — равные равносторонние треугольники. Петя соединил две вершины ячеек X и Y отрезком и отметил другую вершину ячейки — точку A. Ему нужно нарисовать отрезок с концом в точке A, перпендикулярный отрезку XY. Отмечено несколько точек B с разными номерами (от 1 до 7) — также вершин ячеек. Точку с каким номером нужно выбрать Пете в качестве конца такого отрезка?



11. Точка M — середина гипотенузы прямоугольного треугольника ABC. Найдите величину угла A треугольника ABC, если $\angle BMC + \angle MAC = 171°$?

12. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB = BC = CD$, $\angle B$ — прямой, $\angle C = 30°$. Найдите величину угла A.



13. Отрезок BD — высота треугольника ABC. Найдите величину наибольшего угла треугольника ABC, если $\angle CBD + \angle BAC = 36°$, $\angle DCB + \angle ABC = 135°$.

14. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 60°$. На гипотенузе AB отметили точки D и F, на катете AC — точку E. Отрезки CD и EF перпендикулярны гипотенузе, отрезок DE перпендикулярен катету AC. Найдите длину отрезка BD, если $AF = 7$.

15. Дан треугольник ABC. Внутри него отметили такую точку O, что $AO = BO = CO$. Найдите величину наибольшего угла треугольника ABC, если $\angle ACB + \angle CBO = 94°$, $\angle AOB = 126°$.

Блок 7. Геометрия. Подсчёт углов

Задания Интернет-карусели (2020). Указания, ответы и решения

При решении задач используются факты, которые полезно знать (и уметь доказывать) наряду со стандартными фактами школьной геометрии.

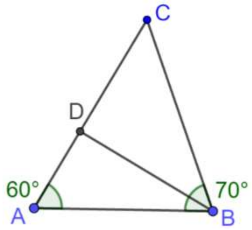
✓ Если в треугольнике угол равен 60°, а прилегающие к нему стороны отличаются в 2 раза, то напротив большей из этих сторон лежит прямой угол.

Рекомендуем парами рассмотреть задачи № 1 и № 6, № 8 и № 11 (можно сначала рассмотреть случаи, когда угол C — прямой).

1. Дан треугольник ABC, у которого $AB = 2$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. На стороне AC отмечена точка D, $AD = 1$. Найдите величину угла DBC.

Ответ: 40°.

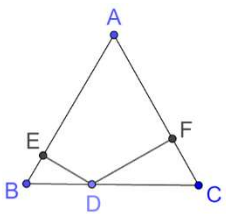
Решение. Верен следующий признак: если в треугольнике угол равен 60°, а прилегающие к нему стороны отличаются в 2 раза, то напротив большей из этих сторон лежит прямой угол. Указанный признак выполнен для треугольника ABD. Из этого следует, что $BD \perp AC$, $\angle ABD = 30°$, $\angle DBC = 70° - 30° = 40°$.



2. На сторонах BC, AB и AC равностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки D, E и F так, что $DE \perp AB$, $DF \perp AC$. Найдите $AE + AF$, если $BC = 24$.

Ответ: 36.

Решение. Треугольники BDE и CDF — прямоугольные с углами, равными 60°. Значит, в них выполнено $BD = 2BE$, $CD = 2CF$. Отсюда $2 \cdot (BE + CF) = BD + CD = BC = 24$, то есть $BE + CF = 12$. Тогда $AE + AF = 2BC - (BE + CF) = 48 - 12 = 36$.



3. Какие из указанных утверждений являются верными?

(1) Если треугольники ABC и XYZ равны, то равны их медианы AA_1 и XX_1.

(2) Если равны медианы AA_1 и XX_1 треугольников ABC и XYZ, то треугольники ABC и XYZ равны.

(3) Если в треугольниках ABC и XYZ равны медианы AA_1 и XX_1, равны стороны AB и XY, равны стороны BC и YZ, то треугольники ABC и XYZ равны.

Ответ: 1 и 3.

Решение. Утверждение (1) верно, в равных треугольниках равны соответственные элементы. В случае соответсвенных медиан это нетрудно доказать. Из равенства $\Delta ABC = \Delta XYZ$ следуют равенства $\angle B = \angle Y$, $AB = XY$, $BA_1 = BC/2 = YZ/2 = YX_1$. Значит, по первому признаку равны треугольники ABA_1 и XYX_1, откуда $AA_1 = XX_1$.

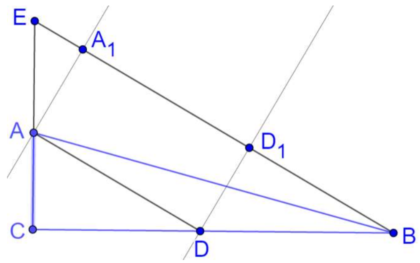
Утверждение (2) не верно. Конечно, существуют неравные треугольники, у которых есть равные медианы. Например, рассмотрим произвольный треугольник ABC. Пусть точка D — середина стороны BC, точки E и F — середины отрезков BD и CD. Тогда AD — медиана как треугольника ABC, так и треугольника AEF. Треугольники ABC и AEF не равны хотя бы потому, что не равны из соответственные углы ($\angle BAC > \angle EAF$).

(3) Из условия $BA_1 = BC/2 = YZ/2 = CX_1$, $AA_1 = XX_1$, $AB = XY$, значит, $\Delta ABA_1 = \Delta XYX_1$ (по трём сторонам). Отсюда $\angle B = \angle Y$. Тогда $\Delta ABC = \Delta XYZ$ по первому признаку ($\angle B = \angle Y$, $AB = XY$, $BC = YZ$).

4. На катете BC прямоугольного треугольника ABC с углом B, равным 15 градусов, отметили такую точку D, что $BD = 2AC$. Найдите величину угла CAD.

Ответ: 60°.

Решение 1 (прямое). Отметим (как показано на рисунке) на продолжении стороны AC такую точку E, что BA — биссектриса угла CBE; точки A_1 и D_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и D на прямую BE.

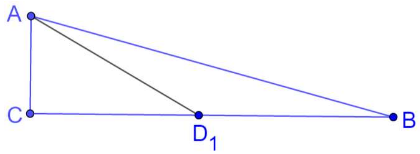


Треугольник BDD_1 — прямоугольный, $\angle DBD_1 = 30°$, значит, $DD_1 = BD/2 = AC$.

Отрезки AC и AA_1 — перпендикуляры, опущенные из точки на биссектрисе угла CBE на его стороны, значит, $AC = AA_1$.

Получаем $DD_1 = AA_1$, из чего следует параллельность прямых AD и BE. Треугольник BCE — прямоугольный с углами $\angle B = 2 \cdot 15° = 30°$ и $\angle E = 60°$. Значит, $\angle CAD = \angle CEB = 60°$.

Решение 2 («косвенное»). Отметим на катете BC такую точку D_1, что $\angle CAD_1 = 60°$.

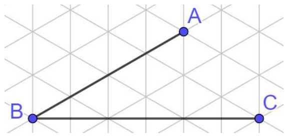


Треугольник ACD_1 — прямоугольный с углом $\angle CAD_1 = 60°$. В нём $2AC = AD_1$.

В треугольнике ABC угол A равен $90° - 15° = 75°$, откуда $\angle BAD_1 = 75° - 60° = 15°$. Тогда треугольник ABD_1 — равнобедренный (так как $\angle BAD_1 = \angle ABD_1 = 15°$), в нём $AD_1 = BD_1$.

Значит, $2AC = AD_1 = BD_1$. Вывод: точка D_1 совпадает с точкой D, данной в условии. То есть $\angle CAD = \angle CAD_1 = 60°$.

5. На рисунке показано, что плоскость разделена прямыми на равные равносторонние треугольники. Точки A, B и C — вершины таких треугольников, как показано на рисунке. Сколько градусов составляет величина угла ABC?



Ответ: 30°.

Указание. Из картинки видно, что BC — биссектриса угла одной ячейки, сторона которого лежит на AB. Значит, указанный угол равен $60° : 2 = 30°$.

6. Дан треугольник ABC, $\angle B = 80°$. На стороне AC отмечена точка D, $AD = 1$, $BD = 2$, $\angle BDC = 120°$. Найдите величину угла DBC.

Ответ: 50°.

Решение. Верен следующий признак: если в треугольнике угол равен 60°, а прилегающие к нему стороны отличаются в 2 раза, то напротив большей из этих сторон лежит прямой угол. Указанный признак выполнен для треугольника ABD. Из этого следует, что $AB \perp AC$, $\angle ABD = 30°$, $\angle DBC = 80° - 30° = 50°$.

7. Точка I — пересечение биссектрис всех трёх углов треугольника ABC. Какие из указанных утверждений являются верными?

(1) Если треугольник ABC равнобедренный, то среди отрезков AI, BI, CI найдутся два равных.

(2) Если углы AIB, BIC, CIA равны, то треугольник ABC — равносторонний.

(3) Если угол AIB — острый, то треугольник ABC — прямоугольный.

Ответ: 1, 2 и 3.

Решение. Утверждение (1) верно. Пусть треугольник ABC — равнобедренный. Без ограничения общности можно считать, что $AB = AC$. Тогда $\angle ABC = \angle ACB$. Так как BI и CI — биссектрисы, то $\angle IBC = \angle ICB$. Значит, треугольник IBC — равнобедренный, $BI = CI$.

Утверждение (2) верно. Рассмотрим треугольники AIB и AIC. В них $\angle AIB = \angle AIC$. Если $\angle AIB = \angle AIC$, то (исходя их суммы углов треугольников) $\angle IBA = \angle ICA$. Так как BI и CI — биссектрисы, то углы B и C треугольника ABC равны. Аналогично из равенства $\angle AIB = \angle BIC$ следует равенство углов A и C треугольника ABC. Значит, углы треугольника ABC равны, он равносторонний.

Утверждение (3) верно. Сравнив суммы углов треугольника ABC и ABI с учётом, что AI и BI — биссектрисы, получаем:

$180° = \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2(\angle ABI + \angle BAI) + \angle ACB = (\angle ABI + \angle BAI) + \angle AIB$.

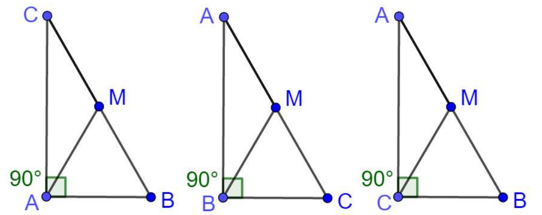
Отсюда следует, что $\angle AIB = 90° + \angle ACB/2$. Значит, $\angle AIB$ — тупой. Так как из ложного утверждения следует что угодно, то данное утверждение верное.

Комментарий. Полезный факт: если BI и CI — биссектрисы углов треугольника ABC, то $\angle BIC = 90° + \angle BAC/2$.

8. Точка M — середина гипотенузы прямоугольного треугольника ABC. Найдите величину угла A треугольника ABC, если $\angle AMC = \angle BMC + 44°$?

Ответ: 34° или 68°.

Решение. Возможно 3 разных случая, какой из углов треугольника является прямым. Заметим, что вариант, изображенный на картинке 1, невозможен: в нём $\angle AMC < \angle BMC$, это противоречит соотношению $\angle AMC = \angle BMC + 44°$.



Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Рассмотрим ситуации на картинках 2 и 3.

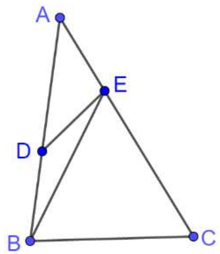
Если угол B — прямой (картинка 2), то $\angle AMC = 180°$, откуда $\angle BMA = 44°$. Треугольник ABM равнобедренный ($AM = BM$), значит, $\angle BAM = (180° - 44°) : 2 = 68°$.

Если угол C — прямой (картинка 3), то $\angle AMC + \angle BMC = 180°$. С учётом данного соотношения получаем, что $\angle AMC = 112°$. Треугольник ACM равнобедренный ($AM = CM$), значит, $\angle CAM = (180° - 112°) : 2 = 34°$.

9. На сторонах AB и AC есть соответственно такие точки D и E, что $AE = ED = BD$, $CE = EB$. Сколько градусов составляет величина угла A треугольника ABC?

Ответ: любое число градусов, большее 0° и меньшее 22,5°.

Указание. Найти величину угла A нельзя, так как существует бесконечно много таких значений. Покажем (1) какое соотношение углов должно быть в таком треугольнике ABC, (2) что любой такой треугольник удовлетворяет условию.

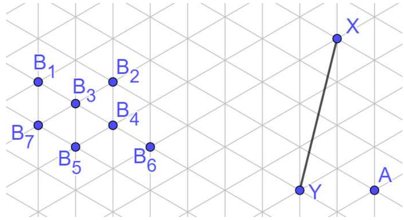


Решение. Пусть $\angle ABE = 2\alpha$. Тогда, учитывая равнобедренность треугольников BDE, AED и BCE, получаем:
$\angle BAC = \angle ADE = 4\alpha$;
$\angle BEC = 6\alpha$;
$\angle CBE = \angle BCA = 90° - 3\alpha$;
$\angle ABC = 90° - 3\alpha + 2\alpha = 90° - \alpha$.

При этом $\angle BAC$ должен быть острым как угол при основании равнобедренного треугольника ADE, поэтому $4\alpha < 90°$, $\alpha < 22{,}5°$,

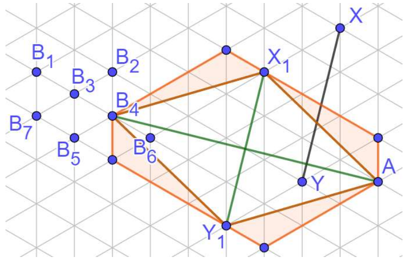
С другой стороны, если возьмём треугольник ABC, в котором $\angle A = 4\alpha$, $\angle B = 90° - \alpha$, $\angle C = 90° - 3\alpha$, то такие точки D и E найдутся. Действительно, $\angle B = 90° - \alpha > 2\alpha$ (так как $4\alpha < 90°$), значит, на AC есть точка E, что $\angle ABE = 2\alpha$. Тогда будет выполнено $BE = CE$. Получаем, что $\angle ABE = 2(90° - 3\alpha) = 180° - 6\alpha > 2\alpha$ (так как $4\alpha < 90°$). Значит, на AB есть такая точка D, что $\angle BED = 2\alpha$. При этом будет выполнено $BD = DE$, $\angle ADE = 4\alpha$, $AE = DE$.

10. На рисунке показано, что плоскость разделена прямыми на ячейки — равные равносторонние треугольники. Петя соединил две вершины ячеек X и Y отрезком и отметил другую вершину ячейки — точку A. Ему нужно нарисовать отрезок с концом в точке A, перпендикулярный отрезку XY. Отмечено несколько точек B с разными номерами (от 1 до 7) — также вершин ячеек. Точку с каким номером нужно выбрать Пете в качестве конца такого отрезка?



Ответ: 4.

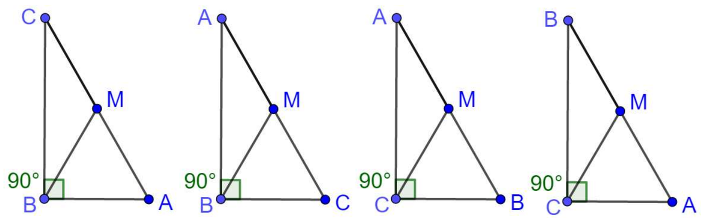
Указание. На рисунке отрезки XY и X_1Y_1 параллельны, отрезки AX_1, X_1B_4, B_4Y_1, Y_1A равны (так как равны выделенные треугольники). Значит, прямая AB_4 перпендикулярна X_1Y_1 и, следовательно, XY. Никакая другая из отмеченных точек на прямой AB_4 не лежит.



11. Точка M — середина гипотенузы прямоугольного треугольника ABC. Найдите величину угла A треугольника ABC, если $\angle BMC + \angle MAC = 171°$?

Ответ: 57° или 85,5°.

Решение. Из условия следует, что $\angle BMC < 180°$, поэтому BC не может быть гипотенузой. Возможно 4 разных случая расположения точек, показанные на рисунках

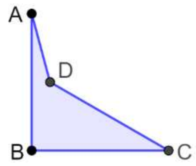


Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Рассмотрим изображенные случаи.

Рисунок 1 и 2. Здесь $\angle MAC = 0°$, $\angle BMC = 171°$. Так как треугольник AMB равнобедренный ($AM = BM$), $\angle BMC$ — его внешний угол, то $\angle A = 171° : 2 = 85{,}5°$.

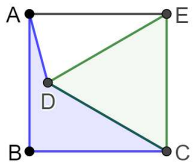
Рисунок 3 и 4. Так как треугольник AMB равнобедренный ($AM = BM$), $\angle BMC$ — его внешний угол, то $\angle BMC = 2\angle A$, откуда $\angle A = 171° : 3 = 57°$.

12. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB = BC = CD$, $\angle B$ — прямой, $\angle C = 30°$. Найдите величину угла A.



Ответ: 15°.

Решение. Так как $AB = BC$, $\angle B$ — прямой, то можно отметить такую точку E, что $ABCE$ — квадрат.



Тогда $\angle DCE = \angle BCE - \angle BCD = 90° - 30° = 60°$. Так как $CD = CE$, то треугольник CDE — равносторонний. Тогда $DE = AE$, $\angle AED = \angle AEC - \angle DEC = 90° - 60° = 30°$. В равнобедренном треугольнике AED получаем $\angle EAD = (180° - \angle AED) : 2 = 75°$. Отсюда $\angle BAD = \angle BAE - \angle EAD = 90° - 75° = 15°$.

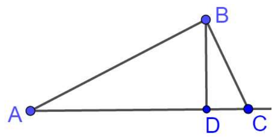
Комментарий. Сравните с задачей, предлагаемой на «Математическом Празднике» (7 класс, февраль 2020 года):

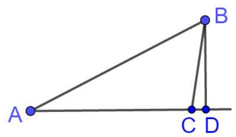
Три стороны четырёхугольника равны, а углы четырёхугольника, образованные этими сторонами, равны 90° и 150°. Найдите два других угла этого четырёхугольника.

13. Отрезок BD — высота треугольника ABC. Найдите величину наибольшего угла треугольника ABC, если $\angle CBD + \angle BAC = 36°$, $\angle DCB + \angle ABC = 135°$.

Ответ: 99°.

Решение. Так как $\angle BAC$ не более 36°, то он острый. Значит, точка D (основание высоты) лежит либо на стороне AC, либо на её продолжении за точку C.





(1) Пусть точка D лежит на стороне AC (рисунок слева). Если $\angle A = \alpha$, то из данных соотношений следует, что $\angle ABD = 90° - \alpha$, $\angle CBD = 36° - \alpha$, $\angle ABC = 126° - 2\alpha$, $\angle DCB = 135° - (126° - 2\alpha) = 9° + 2\alpha$.

Тогда $\angle CBD + \angle DCB = (36° - \alpha) + (9° + 2\alpha) = 45° + \alpha = 90°$, откуда $\alpha = 45°$. Это невозможно, так как тогда $\angle CBD = 36° - \alpha < 0°$.

(2) Пусть точка D лежит на продолжении стороны AC за точку C. (рисунок справа). Если $\angle A = \alpha$, то из данных соотношений следует:
$\angle ABD = 90° - \alpha$,
$\angle CBD = 36° - \alpha$,
$\angle ABC = (90° - \alpha) - (36° - \alpha) = 54°$,
$\angle DCB = 135° - \angle ABC = 81°$,
$\angle ACB = 180° - 81° = 99°$.

Получаем, что наибольший угол треугольника ABC равен 99°.

14. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 60°$. На гипотенузе AB отметили точки D и F, на катете AC — точку E. Отрезки CD и EF перпендикулярны гипотенузе, отрезок DE перпендикулярен катету AC. Найдите длину отрезка BD, если $AF = 7$.

Ответ: 84.

Решение. В прямоугольном треугольнике с углом 60° катет, прилежащий к этому углу, вдвое меньше гипотенузе.
Из треугольника AFE следует, что $AE = 2AF = 14$.
Из треугольника AED следует, что $AD = 2AE = 28$.
Из треугольника ACD следует, что $AC = 2AD = 56$.
Из треугольника ABC следует, что $AB = 2AC = 112$.
Тогда $BD = AB - AD = 112 - 28 = 84$.

15. Дан треугольник ABC. Внутри него отметили такую точку O, что $AO = BO = CO$. Найдите величину наибольшего угла треугольника ABC, если $\angle ACB + \angle CBO = 94°$, $\angle AOB = 126°$.

Ответ: 63°.

Решение. В равнобедренном треугольнике ABO углы при основании равны $(180° - 126°) : 2 = 27°$. Так как $\angle BAC + \angle BCO = 90°$, $\angle BAO = 27°$, $\angle CAO = \angle ACO$, то $\angle ACB = \angle ACO + \angle BCO = 90° - 27° = 63°$. Тогда $\angle CBO = 94° - 63° = 31°$. Далее получаем $\angle ACO = 63° - 31° = 32° = \angle CAO$.

В итоге получаем величины углов треугольника ABC: $\angle A = 27° + 32° = 59°$, $\angle B = 27° + 31° = 58°$, $\angle C = 31° + 32° = 63°$. Наибольший угол равен 63°.