Блок 6. Делимость. Часть 2

Задания Интернет-карусели (2020)

1. Какое из чисел 996, 998, 1000, 1002, 1004 даёт самый большой остаток при делении на 13?

2. Семиклассница Оля поделила натуральное число N на 12 и 15. Остатки при делении равны 1 и 3, а неполные частные отличаются на 1. Найдите число N.

3. Если в волшебный горшочек положить 2 монеты, то они превратятся в 9 или 16 монет. Ничего иного в него класть нельзя. У Василия было 3 монеты. После того, как он несколько раз воспользовался горшочком, у него стало не менее 1000 монет, но не более 1010. Сколько у него стало монет?

4. Число N даёт остаток 1 при делении на 14. Какой остаток число N может давать при делении на 6?

5. Какой остаток при делении на 7 может давать сумма квадратов 6 последовательных натуральных чисел?

6. Семиклассник Фима выписал в ряд 100 чисел: 2, 1, 3, 4, 7, 11, … — в нём каждое число, начиная со второго, равно сумме двух предыдущих. Затем нашёл сумму этих чисел. Какой остаток даёт полученная сумма при делении на 7?

7. Натуральное число a при делении на 6 дает остаток 5. Какой остаток при делении на 12 даёт число $2a - 2020$?

8. Натуральное число a обладает следующим свойством: если взять любое число n, то из чисел n, $n - 2$, $n - 4$, $n - 6$ хотя бы одно точно делится на a. Чему может быть равно a?

9. Натуральное число a при делении на 13 дает остаток 7. Какой остаток при делении на 13 даёт число $2020 - 3a$?

10. Вася и Петя играют в игру. Сначала Вася пишет на доске квадрат какой-то цифры, а Петя заменяет число Васи его остатком при делении на 7. Потом Вася возводит число на доске в квадрат, а Петя его заменяет остатком при делении на 7. Затем Вася снова возводит число в квадрат и так далее. Если Петя когда-нибудь напишет число 2, то он выиграл у Васи. С каких цифр может начать Вася, чтобы Петя у него не выиграл?

11. В верхнем углу таблицы 3×3 стоит число 1. Остальные клетки пусты. В них вписывают числа по следующему правилу: если в какой-то клетке стоит число a, то в соседнюю пустую клетку можно записать либо число $2a$, либо число $(a - 7)$, либо число $(a + 5)$. Так заполнили числами все клетки, S — модуль суммы всех чисел. Какое наименьшее возможное значение S?

12. Натуральное число a при делении на 6 дает остаток 5. Какой остаток при делении на 12 даёт число $3a - 2020$?

13. Вася и Петя играют в игру. Сначала Вася пишет на доске квадрат какой-то цифры, а Петя заменяет число Васи его остатком при делении на 12. Потом Вася число на доске возводит в квадрат, а Петя его заменяет остатком при делении на 12. Затем Вася снова возводит число в квадрат и так далее. Если Петя когда-нибудь напишет число 3 или 4, то он выиграл у Васи. С каких цифр может начать Вася, чтобы Петя у него не выиграл?

14. Наименьшее натуральное число, которое имеет остаток 3 при делении на 4, на 5 и на 6, — число 3. А какое следующее?

15. Леонид написал в ряд все натуральные числа от 1 до 2020, и расставил между ними знаки, чередуя минусы и плюсы: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \ldots + 2019 - 2020$. Какой остаток при делении на 11 даёт такая сумма?

16. Мама дала Пете 2020 рублей. Каждый день Петя тратил 21 или 35 рублей. Какое наименьшее число рублей в него может остаться после таких трат?

17. На какие числа можно разделить 3240 так, что неполное частное будет в 2 раза больше остатка?

18. Вася натуральное число N разделил с остатком на 48, а Петя число $3N$ разделил с остатком также на 48. Остатки получились равными, а неполное частное у Пети в 4 раза больше, чем у Васи. Чему равно N?

Блок 6. Делимость. Часть 2

Задания Интернет-карусели (2020). Указания, ответы и решения

- Задания интернет-карусели традиционно не упорядочены по сложности. При разборе задач можно выбирать иной порядок, например, по методам, используемых при решении.
- Конечно, при составлении был расчёт на то, что участники будут догадываться до многих ответов. Рассматривая решения можно показать, как интуитивные представления об остатках можно «доводить» до строгих решений.
- Например, прийти к верным ответам в заданиях № 4, № 7, № 9 и № 12 можно было, рассмотрев частные случаи выдвинув правдоподобную гипотезу. Как строго обосновывать такие выводы, показано в решениях этих заданий.

1. Какое из чисел 996, 998, 1000, 1002, 1004 даёт самый большой остаток при делении на 13?

   Ответ: 1000.

   Решение. Указанные числа дают соответственно остатки 8, 10, 12, 1, 3. Наибольший остаток 12 даёт число 1000.

2. Семиклассница Оля поделила натуральное число N на 12 и 15. Остатки при делении равны 1 и 3, а неполные частные отличаются на 1. Найдите число N.

   Ответ: нет такого числа (Оля, видимо, ошиблась в вычислениях).

   Решение. Если число даёт остаток 3 при делении на $12 = 3 \cdot 4$ или $15 = 3 \cdot 5$, то оно делится на 3. Если число даёт остаток 1 при делении на $12 = 3 \cdot 4$ или $15 = 3 \cdot 5$, то оно при делении на 3 даёт остаток 1. Противоречие: число N не может делиться на 3 и давать при делении на 3 остаток 1.

3. Если в волшебный горшочек положить 2 монеты, то они превратятся в 9 или 16 монет. Ничего иного в него класть нельзя. У Василия было 3 монеты. После того, как он несколько раз воспользовался горшочком, у него стало не менее 1000 монет, но не более 1010. Сколько у него стало монет?

   Ответ: 1004.

   Указание: количество монет всегда даёт остаток 3 при делении на 7.

   Решение. Горшочек увеличивает число монет на 7 или на 14. Значит, не меняется остаток количества монет при делении на 7. Изначально он был равен 3. Из чисел от 1000 до 1010 остаток 3 даёт только число 1004.

4. Число N даёт остаток 1 при делении на 14. Какой остаток число N может давать при делении на 6?

   Ответ: 1, 3 или 5.

   Решение 1. Если число даёт остаток 1 при делении на 14, то оно нечётное. Значит, число при делении на 6 может давать только нечётный остаток, то есть 1, 3 или 5. Все три остатка возможны: число $14 \cdot 0 + 1 = 1$ при делении на 6 даёт остаток 1, число $14 \cdot 1 + 1 = 15$ — остаток 3, число $14 \cdot 2 + 1 = 29$ — остаток 5.

   Указание к решению 2. Число N имеет вид $14n + 1$, где n — некоторое целое число. Если известен остаток числа n при делении на 6, то однозначно определен остаток числа N при делении на 6. На самом деле, достаточно рассмотреть различные остатки числа n на 3, что показано ниже в решении.

   Решение 2. Число N имеет вид $14n + 1$, где n — целое число. Число n имеет вид $3k$, $3k + 1$ или $3k + 2$ (k — некоторое целое число). Рассмотрим эти случаи.
   (1) $N = 14 \cdot (3k) + 1 = 6 \cdot (7k) + 1$ — остаток 1 при делении на 6,
   (2) $N = 14 \cdot (3k + 1) + 1 = 6 \cdot (7k + 2) + 3$ — остаток 3 при делении на 6,
   (3) $N = 14 \cdot (3k + 2) + 1 = 6 \cdot (7k + 4) + 5$ — остаток 5 при делении на 6.

5. Какой остаток при делении на 7 может давать сумма квадратов 6 последовательных натуральных чисел?

   Ответ 0, 3, 5 или 6.

   Указание. Можно заметить, что остатки при делении на 7, которые дают $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, \ldots$ равны 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 4, 2, ... В последовательности остатков зацикливается группа 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0.

   Решение. Если число кратно 7, то его квадрат при делении на 7 даёт остаток 0. Если число даёт остаток 1 или 6, то оно имеет вид $7k \pm 1$ (k — некоторое целое число), его квадрат равен $(7k \pm 1)^2 = 7k(7k \pm 2) + 1$ и даёт остаток 1. Если число даёт остаток 2 или 5, то оно имеет вид $7k \pm 1$ (k — некоторое целое число), его квадрат равен $(7k \pm 2)^2 = 7k(7k \pm 4) + 4$ и даёт остаток 4. Если число даёт остаток 3 или 4, то оно имеет вид $7k \pm 3$ (k — некоторое целое число), его квадрат равен $(7k \pm 3)^2 = 7(7k^2 \pm 6k + 1) + 2$ и даёт остаток 2.

   Вывод: сумма квадратов любых 7 подряд идущих чисел дают при делении на 7 остатки 0, 1, 1, 2, 2, 4, 4, а их сумма кратна 7 (так как $0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 4$ делится на 7).

   Значит, сумма квадратов любых 6 подряд идущих чисел при делении на 7 может давать остаток 0 (если не хватает квадрата с остатком 0), остаток 6 (если не хватает квадрата с остатком 1), остаток 5 (если не хватает квадрата с остатком 2), остаток 3 (если не хватает квадрата с остатком 4).

6. Семиклассник Фима выписал в ряд 100 чисел: 2, 1, 3, 4, 7, 11, ... — в нём каждое число, начиная со второго, равно сумме двух предыдущих. Затем нашёл сумму этих чисел. Какой остаток даёт полученная сумма при делении на 7?

   Ответ: 3.

   Указание. Начиная с 16-го числа остатки повторяются. Сумма первых 16 чисел кратна 7. Заметим, $100 = 16 \cdot 6 + 4$, сумма первых 4 остатков равна 10, искомый остаток равен 3.

   Решение. Остаток при делении на 7 каждого числа ряда, начиная с 3-го, определяется остатками двух предыдущих чисел. Выпишем остатки первых чисел ряда:

   <u>2, 1</u>, 3, 4, 0, 4, 4, 1, 5, 6, 4, 3, 0, 3, 3, 6, <u>2, 1</u>, ….

   Если повторились 2 стоящих рядом остатка, то далее последовательность остатков будет повторяться. В цикле получилось 16 чисел, которые в сумме делятся на 7. Так как $100 = 16 \times 6 + 4$, то остаток от деления на 7 суммы всех 100 чисел такой же, как и первых 4 чисел, то есть равен 3.

7. Натуральное число a при делении на 6 дает остаток 5. Какой остаток при делении на 12 даёт число $2a - 2020$?

   Ответ: 6.

   Решение. Из условия $a = 6k + 5$, где k — некоторое целое число. Тогда число $2a - 2020 = 2(6k + 5) - 2020 = 12k - 168 \cdot 12 + 6 = 12(k - 168) + 6$ при делении на 12 даёт остаток 6.

8. Натуральное число a обладает следующим свойством: если взять любое число n, то из чисел n, $n - 2$, $n - 4$, $n - 6$ хотя бы одно точно делится на a. Чему может быть равно a?

   Ответ: 1 или 3.

   Решение. Все числа делятся на 1, поэтому возможно $a = 1$. Числа n, $n - 2$, $n - 4$ дают разные остатки при делении на 3, поэтому одно из них кратно 3. Значит, $a = 3$ подходит.

   Если n нечетно, то указанные числа тоже нечетны, поэтому a — нечетное число. Но при $n = 8$ имеем набор чисел 2, 4, 6, 8, у которых нечётные делители — только 1 и 3. Значит, никакие иные значения a не подходят.

9. Натуральное число a при делении на 13 дает остаток 7. Какой остаток при делении на 13 даёт число $2020 - 3a$?

   Ответ: 10.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

   Решение. Из условия $a = 13k + 7$, где k — некоторое целое число. Тогда число $2020 - 3a = 155 \cdot 13 + 5 - 3(13k + 7) = 13(153 - 3k) + 10$ при делении на 13 даёт остаток 10.

10. Вася и Петя играют в игру. Сначала Вася пишет на доске квадрат какой-то цифры, а Петя заменяет число Васи его остатком при делении на 7. Потом Вася возводит число на доске в квадрат, а Петя его заменяет остатком при делении на 7. Затем Вася снова возводит число в квадрат и так далее. Если Петя когда-нибудь напишет число 2, то он выиграл у Васи. С каких цифр может начать Вася, чтобы Петя у него не выиграл?

    Ответ: 0, 1, 6, 7 или 8.

    Решение. Петя в первый раз написал какое-то число от 0 до 6. Рассмотрим эти случаи.

    (1) Если Петя написал 0, то на доске всегда будет 0. Петя проиграет.

    (2) Если Петя написал 1, то на доске всегда будет 1. Петя проиграет.

    (3) Если Петя написал 2, то он сразу победил.

    (4) Если Петя написал 3, то Вася напишет 9, Петя — 2. Петя победит.

    (5) Если Петя написал 4, то Вася напишет 16, Петя — 2. Петя победит.

    (6) Если Петя написал 5, то Вася напишет 25, Петя — 4. Далее будет как в случае (5). Петя победит.

    (7) Если Петя написал 6, то Вася напишет 36, Петя — 1. Далее на доске всегда будет число 1. Петя проиграет.

    Значит, Васе надо написать такую цифру, чтобы первое написанное Петей число было 0, 1 или 6. Это числа 0, 1, 6, 7, 8.

11. В верхнем углу таблицы 3×3 стоит число 1. Остальные клетки пусты. В них вписывают числа по следующему правилу: если в какой-то клетке стоит число a, то в соседнюю пустую клетку можно записать либо число $2a$, либо число $(a - 7)$, либо число $(a + 5)$. Так заполнили числами все клетки, S — модуль суммы всех чисел. Какое наименьшее возможное значение S?

    Ответ: 0.

    Решение. Таблицу можно так заполнить числами, что $S = 0$, это наименьшая искомая величина. На рисунке показана расстановка, стрелками указан порядок заполнения.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \to & \boxed{-6} & \to & \boxed{-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{6} & & \boxed{-13} & & \boxed{-2} \\ \downarrow & & & & \\ \boxed{12} & \to & \boxed{5} & \to & \boxed{-2} \end{array}$$

12. Натуральное число a при делении на 6 дает остаток 5. Какой остаток при делении на 12 даёт число $3a$ – 2020?

Ответ: 5 или 11.

Решение. Из условия $a = 6k + 5$, где k — некоторое целое число. Тогда число $3a - 2020 = 3(6k + 5) - (336 \cdot 6 + 4) = 6(3k - 335) + 5$ при делении на 6 даёт остаток 5. Если неполное частное $3k - 335$ чётно (при нечётном k), то остаток при делении на 12 равен 5, если нечётно (при чётном k) — равен 5 + 6 = 11.

13. Вася и Петя играют в игру. Сначала Вася пишет на доске квадрат какой-то цифры, а Петя заменяет число Васи его остатком при делении на 12. Потом Вася число на доске возводит в квадрат, а Петя его заменяет остатком при делении на 12. Затем Вася снова возводит число в квадрат и так далее. Если Петя когда-нибудь напишет число 3 или 4, то он выиграл у Васи. С каких цифр может начать Вася, чтобы Петя у него не выиграл?

Ответ: 0, 1, 3, 5, 6, 7, 9.

Решение. Не трудно проверить, что если начать с цифр 1, 5, 7, то на доске всегда будет «1», если с 2, 4, 8 — всегда «4», если с 3 или 9 — всегда «9», с 0 или 6 — всегда 0.

14. Наименьшее натуральное число, которое имеет остаток 3 при делении на 4, на 5 и на 6, — число 3. А какое следующее?

Ответ. 63.

Указание: 4 · 5 · 3 + 3 = 63.

Решение. Искомое число n таково, что $n - 3$ должно быть кратно 4, 5 и 6, то есть делиться на НОК (4; 5; 6) = 4 · 5 · 3 = 60. Значит, $n = 60k + 3$, при $k = 0$ получаем 3, при $k = 1$ получаем 63.

15. Леонид написал в ряд все натуральные числа от 1 до 2020, и расставил между ними знаки, чередуя минусы и плюсы: 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + 7 – … + 2019 – 2020. Какой остаток при делении на 11 даёт такая сумма?

Ответ: 2

Указание: сумма равна −1010 и даёт остаток 2 при делении на 11.

Решение. Объединим слагаемые в 2020 : 2 = 1010 пар и сосчитаем:
(1 – 2) + (3 – 4) + (5 – 6) + … + (2019 – 2020) = −1 · 1010 = −1010.
Число −1010 при делении на 11 даёт в остатке 2.

16. Мама дала Пете 2020 рублей. Каждый день Петя тратил 21 или 35 рублей. Какое наименьшее число рублей в него может остаться после таких трат?

Ответ: 4.

Указание: 2020 дает остаток 4 при делении на 7.

Решение. Так как числа 21 и 35 кратны 7, то сумма денег у Пети не меняет остаток при делении на 7. Так как 2020 даёт остаток 4, то у него не может остаться менее 4 рублей. С другой стороны, если он 96 раз тратил по 21 рублю, то у него станется 2020 – 21 · 96 = 4 рубля.

17. На какие числа можно разделить 3240 так, что неполное частное будет в 2 раза больше остатка?

Ответ: 67, 202.

Решение. Из условия $3240 = 8 \cdot 81 \cdot 5 = 2rd + r = r(2d + 1)$. Число $(2d + 1)$ — нечётный делитель 3240, то есть делитель $3^4 \cdot 5$. Отсюда $r \geq 8$.

Так как $d > r$, то $(2d + 1) \geq 17$, откуда $(2d + 1)$ равно 27, 45, 81, 135, 405. Рассмотрим случаи.

$2d + 1$	27	45	81	135	405
r	120	72	40	24	8
d	13	22	40	67	202

Из таблицы видно, что условию $d > r$ удовлетворяют только последние 2 варианта.

18. Вася натуральное число N разделил с остатком на 48, а Петя число $3N$ разделил с остатком также на 48. Остатки получились равными, а неполное частное у Пети в 4 раза больше, чем у Васи. Чему равно N?

Ответ: 72.

Решение. Из условия $N = 48d + r, 3N = 48 \cdot 4d + r$, откуда $2N = 48 \cdot 3d, N = 72d$. Вася получил остаток $r = 72d - 48d = 24d$, он меньше 48 только при $d = 1$. Значит, $N = 72$.