Блок 4. Турниры

Задания Интернет-карусели (2019)

1. Прошёл круговой турнир по игре Го. Каждый участник сыграл с каждым одну партию. В турнире приняли участие 15 человек. За победу игрок получал 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Вывесили результаты с итоговыми баллами всех участников, указанных в алфавитном порядке. Хулиган Вася оторвал результаты последнего человека с фамилией Фурсенко. Остались следующие результаты: у 5 человек — по 20 баллов, у 4 человек — по 15 баллов, у 3 человек — по 10 баллов, у 2 человек — по 5 баллов. Сколько баллов набрал Фурсенко?

2. Закончился турнир по шахматам, в котором приняли участие 10 игроков. Каждый сыграл с каждым ровно N партий. По итогам заполнили турнирную таблицу, в которую за победу ставили 1 очко, за ничейный результат — 1/2, за поражение — 0 очков. Сумма всех очков в таблице равна 180. Чему равно N?

3. В круговом турнире по шахматам каждые двое участников должны были сыграть между собой одну партию. В ходе турнира двое заболели до того, как прошла половина всех игр, остальные игры прошли без них. В итоге состоялось 94 партии. Сколько было участников турнира?

4. Чемпионат по регби проводился по круговой системе (каждые две команды сыграли между собой один матч). В нём приняло участие нечетное число команд. За победу команда получала 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Места команд с равным числом очков определялись по дополнительным показателям. Каждая команда хотя бы 1 раз победила. Чемпион набрал 10 очков, вторая команда — 7, третья — 5. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

5. Команды Питера и Москвы по теннису состоят из 120 спортсменов, среди которых есть и мужчины, и женщины. Все они участвовали в 120 матчах, в каждом из которых питерский теннисист сыграл с московским. В играх между мужчинами всегда побеждали питерцы, между женщинами — всегда москвички. В играх мужчины против женщины всегда выигрывал мужчина. В итоге москвичи выиграли в три раза больше матчей, чем питерцы. Сколько женщин в сборной Питера?

6. Команда 5 «А» класса играла против команды 5 «В» в шахматы. В каждой игре соревновались ученики разных классов. Известно, что каждый из участников проиграл ровно 6 партий, а в 5 «А» каждый выиграл ровно 5 раз. Из 5 «А» класса играли 30 человек. Сколько играло учеников из 5 «В» класса?

7. В круговом турнире по игре «камень-ножницы-бумага» каждому участнику за победу давали 3 балла, за ничью — 1 балл, за поражение — 0 баллов. Ровно в трети всех поединков была ничья. Сколько в сумме получили очков все 10 участников?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

8. В школе для двух 7 классов прошел турнир по шахматам. Сначала прошло 180 партий, в которых каждый шахматист 7 «А» сыграл с каждым шахматистом 7 «Б» по одной партии. Затем прошли еще 226 партий, в которых каждый семиклассник сыграл 1 раз с каждым своим одноклассником. Сколько всего учеников этих 7 классов приняли участие в турнире?

9. В первом объединенном чемпионате по футболу Ирана и Ирака принимали участие по 10 команд от каждой страны. Каждые две команды сыграли ровно одну игру. Сколько было сыграно матчей, в которых играли друг против друга футболисты одной страны?

10. Во втором объединенном чемпионате по футболу Ирана и Ирака принимали участие команды от каждой страны, всего 30 команд. Каждые две команды сыграли ровно одну игру. Матчей команд из разных страны было на 15 больше, нежели остальных. Сколько команд из Ирана приняло участие в этом чемпионате?

11. В международном теннисном турнире «Karusel Open» принимали участие 256 человек. Турнир проводился по олимпийской системе: в начале каждого дня игроки разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Сколько прошло партий?

12. В международном теннисном турнире «Karusel Open» принимали участие 256 человек. Турнир проводился по олимпийской системе: в начале каждого дня игроки разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Каждый игрок имел номер от 1 до 256. Оказалось, что во встречах игроков, у которых номера отличаются более, чем на 2, всегда побеждал игрок с меньшим номером. Какой наибольший номер мог иметь победитель турнира?

13. Две команды по 10 детей играли в настольный теннис. Каждый игрок сыграл одну партию с одним игроком команды соперника. За победу «в сухую» (если выигравший не пропустил ни одного мяча) давали 5 очков, за простую победу — 4 очка, за ничью — 2 очка, за поражение не «в сухую» — 1 очко, за поражение «в сухую» — 0 очков. Команды в итоговом зачете заработали по 24 балла каждая. Сколько ничьих было среди личных встреч?

14. В школе для 7 «В» и 7 «Г» классов прошел турнир по шахматам. Сначала прошло 378 партий, в которых каждый шахматист сыграл одну партию с каждым шахматистом другого класса. На следующий день состоялась 741 партия, в которых каждый участник сыграл с каждым из остальных одну партию. Сколько шахматистов могло быть в 7 «В» классе?

15. В летней математической школе 60 учеников согласились принять участие в соревновании по армреслингу. Все участники имеют разную силу, более сильный всегда побеждал менее сильного соперника. Какое минимальное число поединков можно провести, чтобы определить самого сильного ребенка?

16. В круговом турнире по игре «камень-ножницы-бумага» приняли участие 10 человек. Каждому участнику за победу давали N баллов, за ничью — 1 балл, за поражение — 0 баллов. Участники всего набрали 139 баллов. Чему равно N?

17. Футбольный турнир 10 дворовых команд прошёл в один круг (каждая сыграла с каждой ровно 1 раз). За победу давали 3 балла, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. После каждого матча победителю давали большой торт (поигравшему — ничего), в случаи ничейного результата каждой команд давали маленький торт. В итоге раздали одинаковое количество больших и маленьких тортов. Сколько суммарно очков заработали все 10 команд?

18. В летней математической школе 64 ученика приняли участие в соревновании по армреслингу. Все участники имеют разную силу, более сильный всегда побеждал менее сильного соперника. Сначала провели турнир по олимпийской системе: всех разбили на пары и в каждой паре выявили победителя, затем всех победителей снова разбили на пары и в каждой нашли победителя, и так далее, пока не остался один участник. После этого решили найти второго по силе ребенка. Какое минимальное число поединков надо провести, чтобы его определить? Все результаты прошлых поединков остаются известны.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

Блок 4. Турниры

Задания Интернет-карусели (2019). Ответы, указания, решения

Задания не упорядочены по возрастанию сложности они идут в том же порядке, что и во время соревнования.

Все задачи посвящены круговым турнирам, за редким исключением. Полезно рассмотреть парами задачи № 9 и № 10, № 11 и № 12 (про олимпийскую системы), № 15 и № 18.

При решении задач без дополнительных пояснений используется следующая формула: если в круговом турнире участвовало n команд, то в нём прошло $n(n-1)/2$ игр.

1. Прошёл круговой турнир по игре Го. Каждый участник сыграл с каждым одну партию. В турнире приняли участие 15 человек. За победу игрок получал 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Вывесили результаты с итоговыми баллами всех участников, указанных в алфавитном порядке. Хулиган Вася оторвал результаты последнего человека с фамилией Фурсенко. Остались следующие результаты: у 5 человек — по 20 баллов, у 4 человек — по 15 баллов, у 3 человек — по 10 баллов, у 2 человек — по 5 баллов. Сколько баллов набрал Фурсенко?

   Ответ: 10.

   Решение. В турнире состоялось $15 \cdot 14 : 2 = 105$ поединков. За каждый игроки получали 2 очка ($1 + 1$ или $2 + 0$). Значит, всего роздано $105 \cdot 2 = 210$ очков. У всех, кроме Фурсенко, $5 \cdot 20 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 200$ очков. Фурсенко заработал $210 - 200 = 10$ очков.

2. Закончился турнир по шахматам, в котором приняли участие 10 игроков. Каждый сыграл с каждым ровно N партий. По итогам заполнили турнирную таблицу, в которую за победу ставили 1 очко, за ничейный результат — 1/2, за поражение — 0 очков. Сумма всех очков в таблице равна 180. Чему равно N?

   Ответ: 4.

   Решение. Каждый сыграл $9N$ партий, то есть всего сыграно $9N \cdot 10 : 2 = 45N$ игр. После каждой игры в таблицу вносили 1 балл (1+0 или два раза по 0,5). Значит, $45N = 180$, откуда $N = 4$.

3. В круговом турнире по шахматам каждые двое участников должны были сыграть между собой одну партию. В ходе турнира двое заболели до того, как прошла половина всех игр, остальные игры прошли без них. В итоге состоялось 94 партии. Сколько было участников турнира?

   Ответ: 16.

   Решение. Пусть в турнире приняли участие n человек. Должно было состояться $n(n-1) : 2$ партий, что более 94. При $n = 14$ число партий менее 94 (их 91), при $n \geq 15$ уже более 94.

   С другой стороны, все, кроме двоих, сыграли все игры между собой. Таких игр не более 94. Значит, $n \leq 14 + 2 = 16$.

   Значит, в турнире принимали участие 15 или 16 человек. Не трудно понять, что для того и другого количества выполняется условие задачи.

4. Чемпионат по регби проводился по круговой системе (каждые две команды сыграли между собой один матч). В нём приняло участие нечетное число команд. За победу команда получала 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Места команд с равным числом очков определялись по дополнительным показателям. Каждая команда хотя бы 1 раз победила. Чемпион набрал 10 очков, вторая команда — 7, третья — 5. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

   Ответ: 3.

   Решение. Рассмотрим все команды, кроме указанных трёх. В игре n команд лучшая набирает не менее n очков. Лучшая их них набрала не более 5 очков, значит, этих команд не более 5, а всего участвовали 3, 4, 5, 6, 7 или 8 команд. Нужно рассмотреть случаи с 3, 5 и 7 командами.

   Случай, когда играли 3 команды, невозможен, так как тогда никакая команда не могла набрать более 6 очков.

   Рассмотрим случай турнира 7 команд. Набрано не более $10 + 7 + 5 \cdot 5 = 42$ очков в $7 \cdot 6 : 2 = 21$ игре. Значит, все игры закончились вничью, что невозможно.

   Турнир 5 команд, удовлетворяющий условию, возможен (см. таблицу ниже). Каждая команда сыграла 4 игры. Несложным перебором легко понять, что 10 очков — это $3 + 3 + 3 + 1$, 7 очков — это $3 + 3 + 1 + 0$, 5 очков — $3 + 1 + 1 + 0$. Значит, в турнире было не менее 2 ничьих, а всего разыграно не более $(5 \cdot 4 : 2) \cdot 3 - 2 = 28$ очков. Последние 2 команды получили не более $28 - (10 + 7 + 5) = 6$ очков. Так как каждая из них имеет хотя бы одну победу, то они набрали по 3 балла.

Места	I	II	III	4	5	Очки
I	•	3	1	3	3	10
II	0	•	1	3	3	7
III	1	1	•	3	0	5
4	0	0	0	•	3	3
5	0	0	3	0	•	3

Комментарий. Прямая оценка общего числа команд может привести к квадратному неравенству. Пусть в чемпионате участвовало n команд, проведено $n(n-1):2$ игр. В каждом матче разыгрывается 2 или 3 очка. За весь чемпионат было разыграно не менее $n(n-1)$ очков. На долю 3 призеров приходится 10 + 7 + 5 = 22 очка. Остальные команды набрали не более чем по 5 очков, а всего — не менее $n(n-1)-22$ очков. Поэтому $n(n-1)-22 \le 5(n-3)$, откуда $n \le 7$.

5. Команды Питера и Москвы по теннису состоят из 120 спортсменов, среди которых есть и мужчины, и женщины. Все они участвовали в 120 матчах, в каждом из которых питерский теннисист сыграл с московским. В играх между мужчинами всегда побеждали питерцы, между женщинами — всегда москвички. В играх мужчины против женщины всегда выигрывал мужчина. В итоге москвичи выиграли в три раза больше матчей, чем питерцы. Сколько женщин в сборной Питера?

   Ответ: 90.

   Решение. Москвичи выиграли все матчи против женщин и проиграли все матчи против мужчин, поэтому в Питерской команде женщин в 3 раза больше, чем мужчин, то есть 90.

6. Команда 5 «А» класса играла против команды 5 «В» в шахматы. В каждой игре соревновались ученики разных классов. Известно, что каждый из участников проиграл ровно 6 партий, а в 5 «А» каждый выиграл ровно 5 раз. Из 5 «А» класса играли 30 человек. Сколько играло учеников из 5 «В» класса?

   Ответ: 25.

   Решение. Всего у 5 «А» класса было $30 \cdot 5 = 150$ побед, число побед 5 «А» равно числу проигрышей 5 «В», поэтому в 5 «В» классе $150 : 6 = 25$ человек.

7. В круговом турнире по игре «камень-ножницы-бумага» каждому участнику за победу давали 3 балла, за ничью — 1 балл, за поражение — 0 баллов. Ровно в трети всех поединков была ничья. Сколько в сумме получили очков все 10 участников?

   Ответ: 120.

   Решение. Прошло $10 \cdot 9 : 2 = 45$ поединков. По условию из них 15 ничьих и 30 поединков с победой. При ничье дают $1 + 1 = 2$ баллов, иначе $3 + 0 = 3$ балла. Значит, в сумме игроки получили $15 \cdot 2 + 30 \cdot 3 = 120$ баллов.

8. В школе для двух 7 классов прошел турнир по шахматам. Сначала прошло 180 партий, в которых каждый шахматист 7 «А» сыграл с каждым шахматистом 7 «Б» по одной партии. Затем прошли еще 226 партий, в которых каждый семиклассник сыграл 1 раз с каждым своим одноклассником. Сколько всего учеников этих 7 классов приняли участие в турнире?

   Ответ: 29.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

   Решение. Заметим, что 180 + 226 = 406 — общее число игр. Если играли n ребят, то было $n(n-1) : 2 = 406$ игр. Тогда $n(n-1) = 406 \cdot 2 = 28 \cdot 29$. Отсюда $n = 29$.

9. В первом объединенном чемпионате по футболу Ирана и Ирака принимали участие по 10 команд от каждой страны. Каждые две команды сыграли ровно одну игру. Сколько было сыграно матчей, в которых играли друг против друга футболисты одной страны?

   Ответ: 90.

   Решение. Между 10 командами проходит $10 \cdot 9 : 2 = 45$ игр. Значит, искомое число равно 45 + 45 = 90.

10. Во втором объединенном чемпионате по футболу Ирана и Ирака принимали участие команды от каждой страны, всего 30 команд. Каждые две команды сыграли ровно одну игру. Матчей команд из разных страны было на 15 больше, нежели остальных. Сколько команд из Ирана приняло участие в этом чемпионате?

    Ответ: 15.

    Решение. Между 30 командами проходит $30 \cdot 29 : 2 = 435$ игр. И условия следует, что игр между командами разных стран ровно $(435 - 15) : 2 + 15 = 225$.

    Пусть от одной страны A команд, от другой — B команд. Тогда $AB = 225$, $A + B = 30$. Сумма и произведение кратны 3, то каждое число кратно 3. Сумма и произведение кратны 5, то каждое число кратно 5. Значит, каждое число не менее $3 \cdot 5 = 15$. Заметим, что $15 \cdot 15$ как раз равно 225.

    Значит, $A = B = 15$, откуда следует ответ.

11. В международном теннисном турнире «Karusel Open» принимали участие 256 человек. Турнир проводился по олимпийской системе: в начале каждого дня игроки разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Сколько прошло партий?

    Ответ: 255.

    Решение 1. С каждой партией выбывает 1 участник. Должны выбыть все, кроме победителя, 256 – 1 = 255 человек. Должно пройти 255 партий.

    Решение 2. В первом туре пройдёт $256 : 2 = 2^8 : 2 = 2^7 = 128$ партий, в следующем — $2^7 : 2 = 2^6 = 64$ партии, и так далее. Всего $2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 255$.

12. В международном теннисном турнире «Karusel Open» принимали участие 256 человек. Турнир проводился по олимпийской системе: в начале каждого дня игроки разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Каждый игрок имел номер от 1 до 256. Оказалось, что во встречах игроков, у которых

номера отличаются более, чем на 2, всегда побеждал игрок с меньшим номером. Какой наибольший номер мог иметь победитель турнира?

Ответ: 16.

Решение. Турнир $256 = 2^8$ игроков по олимпийской системе проходит в 8 туров. Будем следить, какой наименьший номер игрока остался после тура.

Во время первого тура участник № 1 может проиграть участникам с номерами № 2 или № 3, то есть наименьший номер игрока может увеличиться не более чем на 2. Аналогично, если наименьший номер был K, то после очередного тура он не более чем $K + 2$. За 8 туров этот номер не более чем $1 + 8 \cdot 2 = 17$.

На самом деле, № 17 не бывает, а № 16 возможен.

Пусть победил игрок № 17. Тогда в каждом туре наименьший номер игрока должен увеличиваться ровно на 2. Значит, первом туре должны выбыть игроки № 1 и № 2 — они могли проиграть только игрокам № 3 и № 4. Во втором туре должны выбыть игроки № 3 и № 4, они должны проиграть в партиях с игроками № 5 и № 6, и так далее. После седьмого тура должны остаться № 15 и № 16. То есть, в последнем, финальном, бою встретятся игроки № 15 и № 16, то есть игрок № 17 не может стать победителем.

Описанная выше схема игр показывает, как может выиграть участник № 16.

13. Две команды по 10 детей играли в настольный теннис. Каждый игрок сыграл одну партию с одним игроком команды соперника. За победу «в сухую» (если выигравший не пропустил ни одного мяча) давали 5 очков, за простую победу — 4 очка, за ничью — 2 очка, за поражение не «в сухую» — 1 очко, за поражение «в сухую» — 0 очков. Команды в итоговом зачете заработали по 24 балла каждая. Сколько ничьих было среди личных встреч?

Ответ: 2

Решение. За ничью давали $2 + 2 = 4$ очка, иначе $5 + 0 = 5$ или $4 + 1= 5$ очков. Прошло 10 партий, команды заработали $24 + 24 = 48$ очков. Если бы ничьих не было, заработали $10 \cdot 5 = 50$ очков. С каждой ничьей сумма уменьшается на $5 – 4 = 1$. Значит, было $50 – 48 = 2$ ничьих.

14. В школе для 7 «В» и 7 «Г» классов прошел турнир по шахматам. Сначала прошло 378 партий, в которых каждый шахматист сыграл одну партию с каждым шахматистом другого класса. На следующий день состоялась 741 партия, в которых каждый участник сыграл с каждым из остальных одну партию. Сколько шахматистов могло быть в 7 «В» классе?

Ответ: 18, 21.

Решение. Пусть в 7 «В» классе В учеников, в 7 «Г» классе Г учеников. Из условия $В \cdot Г = 378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$, $(В + Г)(В + Г – 1) = 741 \cdot 2 = 39 \cdot 38$. Значит, $В + Г = 39$, что делится на 3. Так как произведение $В \cdot Г$ также кратно 3, то оба числа В и Г делятся на 3, но не делятся на 27, оба не превышают 38. Значит, меньшее из этих чисел может равняться 3, 6, 21, 9, 18. Перебором получаем единственный вариант — 18, при котором второе число будет 21. Число В может быть равным как 18, так и 21.

15. В летней математической школе 60 учеников согласились принять участие в соревновании по армреслингу. Все участники имеют разную силу, более сильный всегда побеждал менее сильного соперника. Какое минимальное число поединков можно провести, чтобы определить самого сильного ребенка?

Ответ: 59.

Решение. Надо про каждого из 59 учеников показать, что он не самый сильный. Значит, он должен проиграть. Чтобы было 59 поражений, надо провести не менее 59 игр.

Найти лучшего за 59 игр можно так: пусть сначала сыграют первый и второй ученики, потом победитель сыграет с третьим учеником, победитель этой партии — с четвертым, и так далее. Последний выигравший будет самым сильным учеником.

16. В круговом турнире по игре «камень-ножницы-бумага» приняли участие 10 человек. Каждому участнику за победу давали N баллов, за ничью — 1 балл, за поражение — 0 баллов. Участники всего набрали 139 баллов. Чему равно N?

Ответ: 9, 51.

Решение. Было $10 \cdot 9 : 2 = 45$ поединков. Если бы все закончились вничью, то сумма баллов была равна $45 \cdot (1 + 1) = 90$. Если ничьи не случилось, в таблицу вносится на $N – 2$ очка больше. Данная сумма на $139 – 90 = 49$ больше, значит, 49 кратно $N – 2$. Тогда $N – 2$ равно 1, 7 или 49, N равно 3, 9 или 51. В данных случаях число не ничейных результатов 49, 7 или 1. Первый вариант не подходит (поединков всего 45), остальные возможны.

17. Футбольный турнир 10 дворовых команд прошёл в один круг (каждая сыграла с каждой ровно 1 раз). За победу давали 3 балла, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. После каждого матча победителю давали большой торт (поигравшему — ничего), в случаи ничейного результата каждой команд давали маленький торт. В итоге раздали одинаковое количество больших и маленьких тортов. Сколько суммарно очков заработали все 10 команд?

Ответ: 120.

Решение. В турнире было $10 \cdot 9 : 2 = 45$ матчей. Если ничья — выдавали 1 большой торт, если нет — 2 маленьких. Так как тех и других тортов поровну, то количество ничьих — треть от общего числа. Значит, в 15 матчах команды получили $1 + 1$ очков, в остальных 30 матчах — $3 + 0$ очков, всего $15 \cdot 2 + 30 \cdot 3 = 120$.

18. В летней математической школе 64 ученика приняли участие в соревновании по армреслингу. Все участники имеют разную силу, более сильный всегда побеждал менее сильного соперника. Сначала провели турнир по олимпийской системе: всех разбили на пары и в каждой паре выявили победителя, затем всех победителей снова разбили на пары и в каждой нашли победителя, и так далее, пока не остался один участник. После этого решили найти второго по силе ребенка. Какое минимальное число поединков надо провести, чтобы его определить? Все результаты прошлых поединков остаются известны.

Ответ: 5.

Решение. Второй по силе мог выбыть только проиграв первому. Значит, он когда-то проиграл ему. Таких людей было 6. Аналогично задаче 15 понимаем, что среди них нужно провести 5 игр.