

Блок 3. Графы

Задания Интернет-карусели (2019)

1. В стране Алфавитии 10 городов. Из города А имеются прямые дороги в Б, В, Г, Д; из города Г — в города Д, И и К; из города Д — в Е; из города Е — в Ж, из Ж — в З и К, из З — в И; из И — в К. Других дорог нет, а все указанные — двухсторонние. Для какого наименьшего N можно утверждать, что от любого города до любого другого можно добраться, проехав не более чем по N дорогам?
2. В стране Числонии есть 90 городов с названиями от 10 до 99. Города соединены авиалинией, если и только если в их названии есть одинаковые цифры. Сколько авиалиний в этой стране?
3. В уже знакомой вам стране Алфавитии 10 городов. Из города А имеются прямые дороги в Б, В, Г, Д; из города Г — в города Д, И и К; из города Д — в Е; из города Е — в Ж; из Ж — в З и К; из З — в И; из И — в К. Других дорог нет, а все указанные — двухсторонние. На какое наименьшее число областей можно разбить эти города так, чтобы дороги были только между городами из разных областей?
4. На картине художника Клеева изображено 20 ультрамариновых отрезков. Каждый отрезок пересекает ровно три других отрезка. Есть только одна точка, через которую проходит более 2 отрезков, в неё пересекаются ровно 4 отрезка. Сколько точек пересечения отрезков на этой картине?
5. В конференции участвовало несколько человек. Каждый за время конференции пожал руку N людям, причем каждому не более одного раза. Всего было сделано 18 рукопожатий. Чему могло быть равно число участников конференции?
6. В уже знакомой вам стране Алфавитии 10 городов. Из города А имеются прямые дороги в Б, В, Г, Д; из города Г — в города Д, И и К; из города Д — в Е; из города Е — в Ж; из Ж — в З и К; из З — в И; из И — в К. Других дорог нет, а все указанные — двухсторонние. Террористы решили взорвать несколько дорог так, чтобы теперь нельзя было добраться от города Г до города Ж. Какое наименьшее число дорог им придется взорвать?
7. Сашенька нарисовал по кругу 11 точек и соединил каждые 2 отрезком. Маша хочет выделить красным фломастером 4 из этих отрезков, не отрывая фломастер от листа и не проводя никакую линию дважды. Сколько разных картинок в итоге может получиться у Маши? Картинки, получаемые поворотом или симметрией, считаются различными.
8. В компании из 19 девочек каждая девочка дружит с 8 другими. Все дружбы взаимны. За неделю каждая девочка разговаривает с каждой из своих подруг по телефону в ровно один час. Сколько часов суммарно проговорят 19 девочек за неделю?

9. В уже знакомой вам стране Алфавитии 10 городов. Из города А имеются прямые дороги в Б, В, Г, Д; из города Г — в города Д, И и К; из города Д — в Е; из города Е — в Ж; из Ж — в З и К; из З — в И; из И — в К. Других дорог нет, а все указанные — двухсторонние. Житель этого года Дмитрий решил объехать всю страну: начав в каком-то городе, он хочет посетить по пути все города (некоторые, возможно, больше 1 раза) и закончить в каком-то другом городе. Какое наименьшее число дорог ему придется проехать?
10. В одном классе находится 5 девочек, 7 мальчиков и учитель. Когда началась перемена, все дети «дали пять» 3 людям. При этом девочки «дают пять» только мальчикам или учителю, а мальчики — только девочкам или учителю. Кроме того, никакая пара людей не «дает пять» друг другу больше одного раза. Сколько раз «давали пять» учителю?
11. В стране Тройка от Столицы можно добраться до любого другого города не более, чем за 3 пересадки. При этом из каждого города, кроме Дальнего выходит ровно по 3 дороги, а из Дальнего — 2 дороги. Какое наибольшее число городов (включая Столицу) может быть в этой стране?
12. Гексеракт — аналог куба в шестимерном пространстве. Он имеет 2^6 вершин, из каждой вершины выходит 6 ребер. Сколько всего ребер у гексеракта?
13. Васенька поставил на листе бумаги 17 точек так, что никакие 3 не лежат на 1 прямой, а затем соединил точки отрезками так, что для каждой точки найдут по крайней мере 3 других, с которыми она не соединена отрезком. Какое наибольшее число отрезков мог получить Васенька?
14. Петя нарисовал R красных точек, B синих точек и соединил некоторые пары точек отрезками так, что каждая красная соединена с 3 красными и 4 синими точками, а каждая синяя соединена с 5 синими точками и 6 красными точками. При каком наименьшем числе $R + B$ точек такое возможно?
15. Оля отметила 4 вершины квадрата разными цветами: жёлтым, зеленым, синим и красным. Далее она провела не менее 3 отрезков с концами в этих точках. Сколько разных картинок можно получить таким образом? Картинки считаются разными, если есть два таких цвета, что в первом случае точки такого цвета соединены, а во втором — нет.
16. В стране Сладкоманов 9 городов: Конфетория, Шоколада, Морожена, Нуга, Халва, Леденова, Ириса, Пахлава и Гемотогена. На данный момент из одного города в другой есть авиалиния в том и только том случае, когда в их названиях совпадают хотя бы 2 согласные буквы. Сколько еще минимум авиалиний нужно открыть, чтобы от любого города можно было долететь до любого другого (возможно с пересадками)?

Блок 3. Графы

Задания Интернет-карусели (2019). Ответы, указания, решения

Данная интернет-карусель была посвящена задачам про графы. *Граф* — схема, в которой есть *вершины* (точки), каждые две из которых либо не соединены, либо соединены *ребром* (линией). *Степень вершины* — количество выходящих из неё ребер.

В решении многих задач используется простое соотношение: количество ребер графа равно полусумме степеней вершин. Из этого следуют такие полезные выводы:

- (1) если в графе n вершин, степень каждой из которых равна k , то в нём $nk : 2$ ребер;
- (2) в любом графе сумма степеней вершин любого графа чётна;
- (3) в любом графе чётно число вершин с нечётной степенью.

1. В стране Алфавитии 10 городов. Из города А имеются прямые дороги в Б, В, Г, Д; из города Г — в города Д, И и К; из города Д — в Е; из города Е — в Ж, из Ж — в З и К, из З — в И; из И — в К. Других дорог нет, а все указанные — двухсторонние. Для какого наименьшего N можно утверждать, что от любого города до любого другого можно добраться, проехав не более чем по N дорогам?

Ответ: 4.

Решение. Рассмотрим граф (рисунок справа), в котором города — вершины, дороги — ребра.

С одной стороны, не трудно проверить, что между любыми двумя другими городами есть путь, состоящий не более чем из 4 дорог.

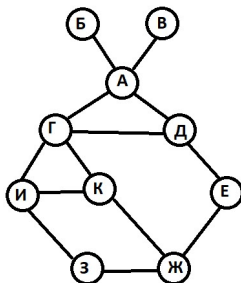
С другой стороны, из городов Б или В в город З нельзя добраться менее чем по 4 дорогам.

2. В стране Числонии есть 90 городов с названиями от 10 до 99. Города соединены авиалинией, если и только если в их названии есть одинаковые цифры. Сколько авиалиний в этой стране?

Ответ: 1377.

Решение 1. Расположим данные числа от 10 до 99 в виде таблицы, как показано справа. Числа, имеющие общую цифру $k \neq 0$, располагаются в «кресте» (на рисунке отмечено для $k = 4$). Два числа из креста можно выбрать $18 \cdot 17 : 2$ способами; всего 9 крестов. Отдельно, если общая цифра «0», тогда $9 \cdot 8 : 2$ способов. При этом

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99



пары чисел, составленные из двух разных ненулевых цифр, посчитаны дважды; их $9 \cdot 8 : 2$.

Итого: $9 \cdot 18 \cdot 17 : 2 + 9 \cdot 8 : 2 - 9 \cdot 8 : 2 = 1377$.

Решение 2. Из города АВ, где $A \neq B$ — ненулевые цифры, выходят дороги в 33 города (на рисунке 1 ниже пример для города «35»). Из города АА выходит 17 дорог (на рисунке 3 ниже пример для города «77»). Из города А0 выходит 25 дорог (на рисунке 2 ниже пример для города «40»). Городов первого типа 72, второго — 9, третьего — 9. Тогда число ребер графа — половина суммы степеней вершин, то есть равна $(72 \cdot 33 + 9 \cdot 25 + 9 \cdot 17) : 2 = 36 \cdot 33 + 9 \cdot 21 = 1377$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

3. В уже знакомой вам стране Алфавитии 10 городов. Из города А имеются прямые дороги в Б, В, Г, Д; из города Г — в города Д, И и К; из города Д — в Е; из города Е — в Ж; из Ж — в З и К; из З — в И; из И — в К. Других дорог нет, а все указанные — двухсторонние. На какое наименьшее число областей можно разбить эти города так, чтобы дороги были только между городами из разных областей?

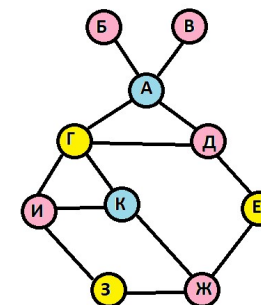
Ответ: 3.

Решение. Рассмотрим граф (рисунок справа), в котором города — вершины, дороги — ребра.

С одной стороны, любые два из городов Г, И и К соединены дорогой, они должны быть из трёх разных областей. С другой стороны, на рисунке показано, как все города можно разбить на 3 области (разные области — разные цвета).

4. На картине художника Клеева изображено 20 ультрамариновых отрезков. Каждый отрезок пересекает ровно три других отрезка. Есть только одна точка, через которую проходит более 2 отрезков, в ней пересекаются ровно 4 отрезка. Сколько точек пересечения отрезков на этой картине?

Ответ: 25.



Решение. Если бы все пересекались по два, то было бы $20 \cdot 3 : 2 = 30$ точек. Когда пересекаются 4 отрезка, то вместо 6 точек остаётся одна. Значит, искомое число $30 - 5 = 25$.

5. В конференции участвовало несколько человек. Каждый за время конференции пожал руку N людям, причем каждому не более одного раза. Всего было сделано 18 рукопожатий. Чему могло быть равно число участников конференции?

Ответ: 9, 12, 18, 36.

Решение. Пусть K — количество участников, N — количество рукопожатий, которое сделал каждый из них, $K > N$. Тогда было сделано $KN : 2 = 18$ рукопожатий. Тогда $KN = 36$, K — любой делитель числа 36, больший 6, то есть 9, 12, 18 или 36.

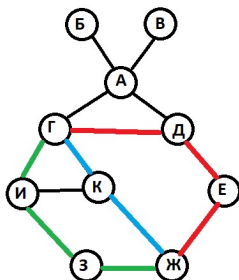
6. В уже знакомой вам стране Алфавитии 10 городов. Из города А имеются прямые дороги в Б, В, Г, Д; из города Г — в города Д, И и К; из города Д — в Е; из города Е — в Ж; из Ж — в З и К; из З — в И; из И — в К. Других дорог нет, а все указанные — двухсторонние. Террористы решили взорвать несколько дорог так, чтобы теперь нельзя было добраться от города Г до города Ж. Какое наименьшее число дорог им придется взорвать?

Ответ: 3.

Решение. Рассмотрим граф (рисунок справа), в котором города — вершины, дороги — ребра.

Можно взорвать 3 дороги из города Ж.

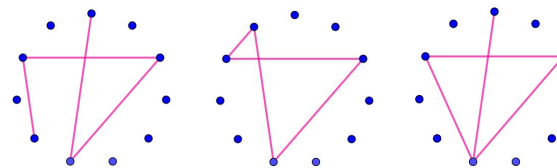
Если взорвать меньшее количество, то цель будет не достигнута. На рисунке выделены три непересекающихся пути (зеленый, синий и красный) из Г в Ж, в каждом из них надо взорвать хотя бы одну дорогу.



7. Сашенька нарисовал по кругу 11 точек и соединил каждые 2 отрезком. Маша хочет выделить красным фломастером 4 из этих отрезков, не отрывая фломастер от листа и не проводя никакую линию дважды. Сколько разных картинок в итоге может получиться у Маши? Картинки, получаемые поворотом или симметрией, считаются различными.

Ответ: 8910.

Решение. Сашенька могла нарисовать незамкнутую ломаную (пример показан на рисунке 1), замкнутую ломаную (пример на рисунке 2), треугольник «с хвостиком» (пример на рисунке 3).



(1) Первую точку для незамкнутой ломаной можно выбрать 11 способами, вторую — 10, третью — 9, четвертую — 8, пятую — 7 способами. Каждую ломаную могли нарисовать 2 способами (в одном направлении или другом). Получаем $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 : 2 = 27\,720$ штук.

(2) Первую точку для замкнутой ломаной можно выбрать 11 способами, вторую — 10, третью — 9, четвертую — 8 способами. Каждую ломаную могли нарисовать 8 способами (начиная в любой из 4 точек в одном направлении или другом). Получаем $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 : 8 = 990$ штук.

(3) Первую точку для «хвостика» для треугольника с «хвостиком» можно выбрать 11 способами, вторую — 10, третью — 9, четвертую — 8 способами. Каждую ломаную могли нарисовать 2 способами (направляясь от второй точки в одном направлении или другом). Получаем $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 : 2 = 3\,960$ штук.

Итого: $27\,720 + 990 + 3\,960 = 32\,670$.

8. В компании из 19 девочек каждая девочка дружит с 8 другими. Все дружбы взаимны. За неделю каждая девочка разговаривает с каждой из своих подруг по телефону в ровно один час. Сколько часов суммарно проговорят 19 девочек за неделю?

Ответ: 76.

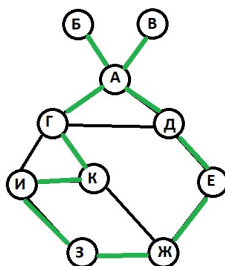
Решение. Рассмотрим граф, в котором девочки — вершины, каждый разговор — ребро. Искомое количество часов — число ребер в графе из 19 вершин, степень каждой из которых 8, то есть $19 \cdot 8 : 2 = 76$.

9. В уже знакомой вам стране Алфавитии 10 городов. Из города А имеются прямые дороги в Б, В, Г, Д; из города Г — в города Д, И и К; из города Д — в Е; из города Е — в Ж; из Ж — в З и К; из З — в И; из И — в К. Других дорог нет, а все указанные — двухсторонние. Житель этого года Дмитрий решил объехать всю страну: начав в каком-то городе, он хочет посетить по пути все города (некоторые, возможно, больше 1 раза) и закончить в каком-то другом городе. Какое наименьшее число дорог ему придется проехать?

Ответ: 10.

Решение. Рассмотрим граф (рисунок справа), в котором города — вершины, дороги — ребра.

В Алфавитии 10 городов, поэтому путь по всем из них должен пройти по крайней мере по 9 дорогам. Но чтобы побывать и в городе Б, и в городе В, необходимо побывать в городе А хотя бы 2 раза. Тогда городов не меньше 10. Пример пути по 10 дорогам показан на рисунке (выделен зеленым цветом).



10. В одном классе находится 5 девочек, 7 мальчиков и учитель. Когда началась перемена, все дети «дали пять» 3 людям. При этом девочки «дают пять» только мальчикам или учителю, а мальчики — только девочкам или учителю. Кроме того, никакая пара людей не «дает пять» друг другу больше одного раза. Сколько раз «давали пять» учителю?

Ответ: 6 или 8.

Решение. Рассмотрим граф, в котором люди — вершины, а те, которые «дали пять» друг другу соединены ребром.

По условию из вершин-мальчиков выходит $7 \cdot 3 = 21$ ребро, из вершин-девочек — $5 \cdot 3 = 15$ ребер. Тогда из вершин-мальчиков в вершину-учителя выходит не меньше $21 - 15 = 6$ ребер. Мальчиков только семеро, из них в вершину-учителя выходит 6 или 7 ребер.

В первом случае все ребра из вершин-девочек выходят в вершины-мальчиков, поэтому степень вершины-учителя равна 6. Во втором случае одно из ребер от вершин-девочек ведет в вершину-учителя, её степень будет 8.

11. В стране Тройка от Столицы можно добраться до любого другого города не более, чем за 3 пересадки. При этом из каждого города, кроме Дальнего, выходит ровно по 3 дороги, а из Дальнего — 2 дороги. Какое наибольшее число городов (включая Столицу) может быть в этой стране?

Ответ: 45.

Решение. Рассмотрим граф, в котором города — вершины, а дороги между ними — ребрами. Самый короткий путь от обычного города до Столицы проходит по 1, 2, 3 или 4 дорогам. Назовём первые города *ближними*, вторые — *близкими*, а четвёртые — *дальними*.

Ближних городов ровно 3, так как из Столицы выходит 3 дороги.

В *ближний* город идёт дорога в какой-то *ближний* город, но из каждого *ближнего* города в *близкие* выходит не более двух дорог. Значит, *ближних* городов не более чем $3 \cdot 2 = 6$.

Аналогично получается, что *средних* городов не более чем $2 \cdot 6 = 12$, а *дальних* городов не более $2 \cdot 12 = 24$.

Значит, в указанном графе не более $1 + 3 + 6 + 12 + 24 = 46$ вершин. Если их ровно 46, то сумма степеней вершин равна $45 \cdot 3 + 2$ — нечётна. Такое невозможно. Значит, вершин-городов не более 45.

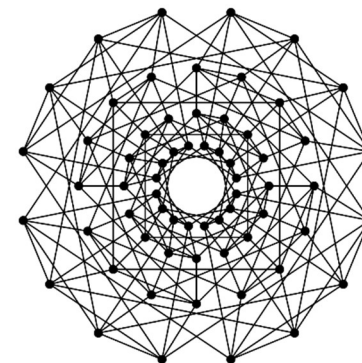
Для полноты решения нужно показать, что такой граф с 45 вершинами существует. Его нетрудно построить, исходя из рассуждений выше (постарайтесь сделать это самостоятельно).

12. Гексеракт — аналог куба в шестимерном пространстве. Он имеет 2^6 вершин, из каждой вершины выходит 6 ребер. Сколько всего ребер у гексеракта?

Ответ: 192.

Решение. У такого графа $2^6 \cdot 6 : 2 = 192$ ребра.

Комментарий. Граф соединения вершин гексеракта ребрами показан на рисунке справа.

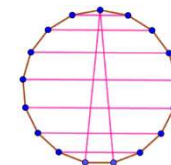


13. Васенька поставил на листе бумаги 17 точек так, что никакие 3 не лежат на 1 прямой, а затем соединил точки отрезками так, что для каждой точки найдутся по крайней мере 3 других, с которыми она не соединена отрезком. Какое наибольшее число отрезков мог получить Васенька?

Ответ: 110.

Решение. Из каждой точки выходит не более $17 - 1 - 3 = 13$ отрезков. Если из каждой точки выходит ровно 13 отрезков, то общее число отрезков $17 \cdot 13 : 2$ не является целым числом. Значит, хотя бы из одной точки выходит не более 12 отрезков, общее число отрезков не более $(16 \cdot 13 + 12) : 2 = 110$.

Ситуация с 110 отрезками возможна. Чтобы построить пример, проще нарисовать отрезки между теми парами точек, которые не соединены отрезком. Нам достаточно нарисовать граф, в котором 16 вершин степени 3 и одна вершина степени 4. Один из возможных таких графов показан на рисунке справа.



14. Петя нарисовал R красных точек, B синих точек и соединил некоторые пары точек отрезками так, что каждая красная соединена с 3 красными и 4 синими точками, а каждая синяя соединена с 5 синими точками и 6 красными точками. При каком наименьшем числе $R + B$ точек такое возможно?

Ответ: 20

Решение. Количество отрезков RB равно $4R = 6B$, откуда $2R = 3B$ или $R = 3t, B = 2t$.

Каждая красная соединена с 3 красными, то есть $R \geq 4$.

Каждая синяя соединена с 5 синими, то есть $B \geq 6$.

Рассмотрим часть графа, в которой только красные вершины и ребра, их соединяющие. Степень каждой вершины нечётна, поэтому число красных вершин чётно. Аналогично, число синих вершин чётно.

Значит, $R = 6n, B = 4n, n \geq 2$. Всего $10n \geq 20$.

Такое возможно, если в графе 8 синих и 12 красных точек. Предлагаем построить пример такого графа самостоятельно.

15. Оля отметила 4 вершины квадрата разными цветами: жёлтым, зеленым, синим и красным. Далее она провела не менее 3 отрезков с концами в этих точках. Сколько разных картинок можно получить таким образом? Картинки считаются разными, если есть два таких цвета, что в первом случае точки такого цвета соединены, а во втором — нет.

Ответ: 42.

Решение. Всего может быть не более 6 отрезков (4 стороны квадрата и 2 его диагонали). Так как для каждого отрезка есть выбор из 2 вариантов (проводить или нет), то всевозможных картинок $2^6 = 64$.

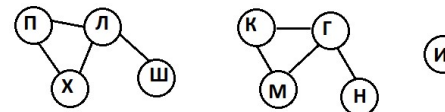
Из этих вариантов надо убрать 1 вариант, когда не проведен ни один из отрезков, 6 вариантов, когда проведен только 1 отрезок. Также лишние $6 \cdot 5 : 2 = 15$ вариантов, когда проведены ровно 2 отрезка.

Остаётся $64 - 1 - 6 - 15 = 42$ варианта.

16. В стране Сладкоманов 9 городов: Конфетория, Шоколада, Морожена, Нуга, Халва, Леденова, Ириса, Пахлава и Гемотогена. На данный момент из одного города в другой есть авиалиния в том и только том случае, когда в их названиях совпадают хотя бы 2 согласные буквы. Сколько еще минимум авиалиний нужно открыть, чтобы от любого города можно было долететь до любого другого (возможно с пересадками)?

Ответ: 2.

Решение. Нарисуем граф, где вершины — города, ребра — авиалинии. Получим следующий рисунок (вершины названы по первым буквам названия города).



Видно, что все города разбиваются на 3 области. Чтобы их соединить нужно хотя бы 2 линии.